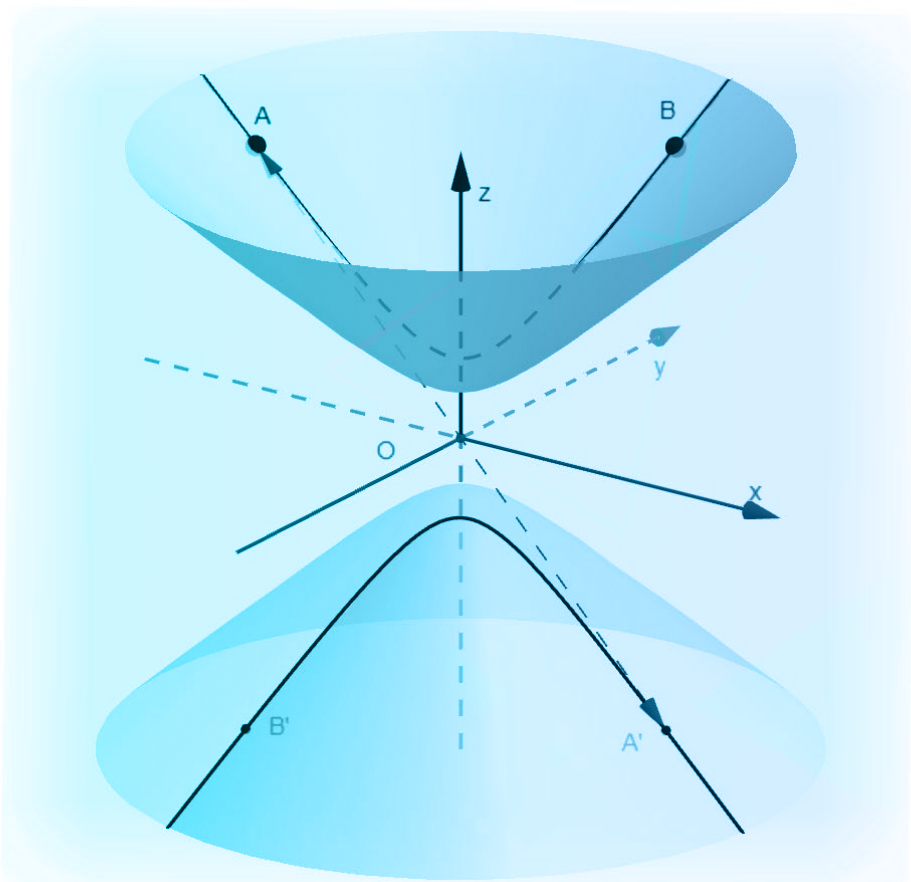


INTERAKTÍVNA GEOMETRIA - PLANIMETRIA





Univerzita Mateja Bela

Fakulta prírodných vied

Interaktívna geometria - planimetria

Vladimír Kobza



Banská Bystrica 2024

Interaktívna geometria - planimetria

Portál: [Virtuálna Univerzita Mateja Bela](#)

Kurz: Interaktívna geomeria

Kniha: [Interaktívna geometria - planimetria](#)

INTERAKTÍVNA GEOMETRIA - PLANIMETRIA

Autor: Mgr. Vladimír Kobza, PhD.

Recenzenti :

Dr.h.c. prof. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.

doc. Mgr. Marek Mokriš, PhD.

Vydavateľ:

Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici

Edícia: Fakulta prírodných vied

Prvé vydanie, 2024.

Schválila Edičná komisia FPV UMB v Banskej Bystrici ako monografiu. Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-557-2155-2

EAN 9788055721552,

<https://doi.org/10.24040/2024.9788055721552>



Táto publikácia je šírená pod licenciou Creative Commons Attribution-NoDerivatives 4.0 International Licence CC BY-ND (uvedenie autora - bez odvodeného obsahu).

Obsah

Úvod	5
Historické poznámky	6
Euklidove Základy	9
Rovnoramenný trojuholník	13
Uhly	15
Vety o trojuholníku	17
Euklidovské konštrukcie	20
Hilbertov axiomatický systém	24
Modely geometrie	27
Zhodnosť	29
Geometria uhlov	31
Usporiadanie	33
Rovnoobežnosť	36
Spojitosť	38
Neeuklidovská geometria	39
Modely	42
Hyperbolická priamka	45
Nástroj hPriamka	47
Nástroj hKružnica	49
Poincare disk	51
Cvičenie I	52
Geometria trojuholníka	54
Kategorizácia trojuholníkov	56
Vybrané vety o trojuholníkoch	58
Ťažisko trojuholníka	60
Výška a stredná prička	63
Trojuholníkové centrum	66
Pytagorova a Euklidove vety	70
Zhodnosť a podobnosť trojuholníkov	74
Vety o zhodnosti trojuholníkov	75
Podobnosť	79
Kružnica, kruh	81
Veta o obvodových uholch	84
Mocnosť bodu ku kružnici	88
Cvičenie II	91
Zobrazenia	92
Stredová súmernosť a rotácia	94
Posunutie	96
Grupa zhodných zobrazení	98
Rovnoľahlosť	99
Afinita	102
Stredová kolineácia	105
Kruhovú inverzia	108
Záver	112
Literatúra	113

Úvod

Geometria je jedným z najstarších odvetví matematiky, ktoré sa zaoberá hlavne polohovými a metrickými vzťahmi medzi rôznymi útvarmi a ich transformáciami. Štúdium geometrie sa opiera o axiomatický systém zavedený Euklidom už pred viac ako dve tisíc rokmi. Euklidov „Základy“ ešte aj dnes považujeme za fundamentálnu učebnicu geometrie. Začiatkom 21. storočia vo veľkom rozsahu začínajú prenikať do všetkých oblastí vzdelávania nové technické informačné a komunikačné prostriedky (IKT), ktoré umožňujú tento proces výrazne zefektívňovať.

Naša práca „Interaktívna geometria“ reaguje na nové trendy prenikania IKT do matematického vzdelávania. Východiskovým cieľom bolo vytvorenie dynamického a interaktívneho elektronického študijného materiálu v systéme LMS Moodle, ktorý čitateľovi prívetivou ale zároveň jasnou formou približuje základy planimetrie. Pri kreovaní aktivity „Elektronická kniha“ v systéme Moodle sme vo významnej miere využili kompatibilitnosť systému Moodle a programu GeoGebra. Obidva tieto softvérové produkty sú voľne šíriteľné a ich používanie zaznamenáva v poslednom období výrazný nárast.

Pri tvorbe našej e-knihy sme mali na zreteli predovšetkým zásadu primeranosti a názornosti, ktorú sme sa snažili dosiahnuť vnorením dynamických appletov do textu. Všetky textové ako aj interaktívne časti sú umiestnené vo voľne dostupnom elektronickom kurze v systéme Moodle. Nami navrhnutý grafický a dynamický obsah stránok kurzu bol motivovaný známym psychologickým tvrdením, že na primerané zmeny v obrazových scénach mozog reaguje veľmi rýchlo a efektívne. Zároveň sme striktné dodržiavali tri zásady:

1. Ak chceme dosiahnuť vyššiu efektívnosť vo využívaní mozgovej kapacity, je vhodné pri odovzdávaní informácií vo väčšej miere využívať dynamickú obrazovú formu.
2. Na druhej strane je nutné mať na zreteli, že neprimerané zvyšovanie frekvencie zmien spomaľuje odozvu u diváka.
3. Zmena farby musí zvýrazňovať zmenu relácie, nie plochy.

Kurz sme podrobili niekoľkonásobným iteráciám metódou DBR. Jeho konečná verzia je voľne dostupná na stránke <https://lms.umb.sk/course/view.php?id=6691>.

"Vzdelávanie je zložitý proces, ktorého kvalita a efektívnosť závisí nielen od obsahu vzdelávania ale aj od foriem a metód použitých v tomto procese." Pozrite v [Zil 2013]. Zefektívniť vzdelávanie je náročná úloha, pretože množstvo informácií neustále narastá a časový interval na ich spracovanie je konštantný, dokonca v niektorých prípadoch (napr. pri matematickej príprave na základných stredných školách) aj znižujúci sa. Viaceré výskumy preukázali, že vhodná integrácia IKT do vzdelávacieho procesu v matematike, najmä využitie ich výhod oproti klasickým učebným materiálom, môže zvýšiť jeho efektívnosť.

Historické poznámky

Slovo **geometria** pochádza z gréckeho výrazu **hé gé meteón**, čo znamená vymeriavanie pozemkov pomocou lán. Pozri prácu [SED]. Matematika ako veda vznikla v Grécku približne v období 6. - 5. st. pred n. l.

Základy geometrie nachádzame už v Babylone, Egypte, Indii a Číne. Veľký rozmach zaznamenala grécka matematika. K zásadnému pokroku v rozvoji geometrie prispeli významní grécki matematici Thales, Pytagoras a Euklides. **Euklidove Základy** môžeme považovať za základy planimetrie, stereometrie a geometrickej algebry. Uvedieme ukážku riešenia úlohy o výpočte obsahu rovnoramenného trojuholníka z obdobia mezopotámskej ríše. Pripomíname, že matematika tohto obdobia používala šesťdesiatkovú číselnú sústavu.

Úloha. (Babylon)

Je daný trojuholník so stranami: (1,40) dĺžka každej z dvoch strán, (2,20) šírka. Aká je plocha?

Obsah trojuholníka v Babylone podľa starobabylonskej tabuľky [YBC 8633](#), na ktorej je klinovým písmom vyrytý postup riešenia úlohy na výpočet obsahu rovnoramenného trojuholníka.



Na obrázku je zobrazená časť tabuľky YBC 8633.

Poznámky

Na výpočet obsahov trojuholníkov používali mezopotámski matematici nasledovné vzorce:

I. $S = \frac{1}{2}a \cdot r$ pre rovnoramenný trojuholník (približný výpočet)

II. $S = \frac{1}{2}a \cdot b$ pre pravouhlý trojuholník (presná hodnota), kde a je základňa a r rameno rovnoramenného trojuholníka resp. odvesny a, b pravouhlého trojuholníka.

III. Pozrite si riešenie úlohy (WORD) [Tu](#) a súbor GeoGebra [Tu](#).

K rozvoju geometrie prispeli aj egyptskí učitelia, ktorí boli nútení po každoročných záplavách Nílu nanovo rozmeriavať pozemkové parcely. Zároveň museli ovládať aj postupy pri rozdeľovaní úrody. Z toho vznikla potreba vedieť vypočítať obsahy rôznych geometrických útvarov ako aj postupy riešenia jednoduchých rovníc. Pozrite si ukážky:

[Egypt](#) - obdobie elementárnych matematických pojmov.

[Rhindov a Moskovský](#) papyrus.

Výpočet obsahov obdĺžnikov, kruhov, trojuholníkov a objemy kvádrov, zrezaných kužeľov a pyramíd. Riešenie rovníc - pozrite si riešenie úlohy R40 z Rhindovho papyrusu.

Úloha

Je potrebné rozdeliť 100 chlebov medzi 5 mužov tak, aby bola jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole.

Poznámky k pôvodnému riešeniu, ktorý je uvedený na papyruse. Pozrite tiež prácu [BEC, 2003]

1. Celkový počet chlebov je 100 a je potrebné tieto chleby nejakým spôsobom rozdeliť medzi 5 mužov. V úlohe sa spomínajú traja horní muži a dvaja dolní. Toto naznačuje určité usporiadanie, ale nie je celkom isté, že ide o aritmetickú postupnosť. To vyplýva až z prezentovaného riešenia.
2. Ďalej je tu podmienka, ktorú je možné interpretovať tak, že súčet počtu chlebov troch horných mužov v usporiadaní sa rovná súčtu chlebov dvoch mužov dole v usporiadaní.

Pôvodné riešenie úlohy R40:

Podmienku, že jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole, môžeme vyjadriť vzťahom:

$$1 + (1 + d) = 1/7[(1 + 2d) + (1 + 3d) + (1 + 4d)]$$

Z predchádzajúceho vzťahu vypočítame

$$d = 5\frac{1}{2}$$

Ide teda o postupnosť

$$2, 6\frac{1}{2}, 12, 17\frac{1}{2}, 23,$$

ktorej súčet je 60. Číslo 60 musíme vynásobiť číslom

$$1\frac{2}{3},$$

aby sme získali požadovaný súčet 100. Týmto číslom musíme preto vynásobiť aj členy vyššie uvedenej postupnosti.

Hľadaná aritmetická postupnosť je teda:

$$1\frac{2}{3}, 10\frac{2}{3}, 16\frac{1}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{2}{3},$$

ktorej diferenciacia je $9\frac{1}{6}$. Tento výsledok však na papyruse nie je uvedený.

V súčasnosti by sa táto úloha mohol počítať takto:

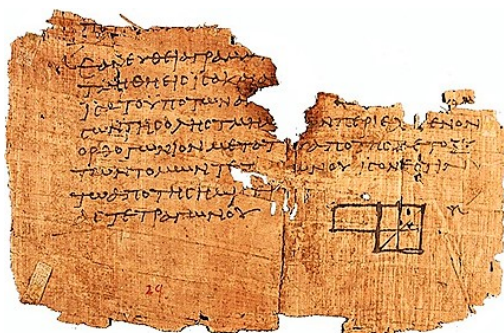
Chybný predpoklad by sme nahradili neznámou a a dostali by sme dve rovnice o dvoch neznámych:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 100$$

$$a + (a + d) = 1/7[(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)].$$

po ekvivalentných úpravách by sme dospeli k tomu istému výsledku.

Matematika ako veda vznikla v Grécku približne v období 6. - 5. st. pred n. l. Gréci ako prví prestali riešiť iba otázku ako, ale hľadali aj odpovede na otázku prečo. Významní predstavitelia gréckej matematiky: Tháles, Pytagoras, [Euklides](#)



Elementy (zdroj:<http://en.wikipedia.org>); Kniha II, Návrh 5 - pozrite [Tú](#).

Otvorte si applet [Tú](#). (Aktivujte si navigačný panel.)

V starom Grécku

1. Bol vytvorený systém základných vzťahov (axióm) a požiadaviek (postulátov) - **Euklidove Základy**. Takýto kompletne spracovaný systém bol publikovaný v Euklidových Základoch. Pozrite si práce [EUC] a [SER]. Toto dielo sa považuje za základy planimetrie, stereometrie a geometrickej algebry. Existuje český preklad od Servíta [Tu](#), Heathov preklad je v online verzii od D.E.Joyce [Tu](#). V roku 2022 vyšiel v nakladateľstve Perfekt slovenský preklad s komentármi od profesora J. Čižmára.
2. Grécki matematici začali matematické tvrdenia dokazovať, pričom používali deduktívnu metódu. Pokúšali sa vyriešiť aj tri preslávené problémy
 - trisekcia uhla (rozdelenie uhla na tri rovnaké uhly),
 - zdvojenie kocky (nájdenie kocky, ktorej objem sa rovná dvojnásobku kocky pôvodnej),
 - kvadratúru kruhu (nájdenie štvorca, ktorý má rovnaký obsah ako daný kruh),len použitím pravítka a kružidla.

Euklidove Základy

"Pane, niet kráľovskej cesty ku geometrii."

Euklidova odpoveď na žiadosť Ptolemaia I. vysvetliť mu svoje Základy rýchlo a ľahko.

Základnými kameňmi pri axiomatickom budovaní geometrie sú

1. **Základné pojmy** (Definície) Euklides popisuje intuitívne pomocou zaužívaných pojmov ako „dĺžka, šírka, ...". Napr.:
 - Bod je to, čo nemá dĺžku.
 - Čiara je dĺžka bez šírky.
 - Hranicami čiary sú body.
 - Priamka (Euklides vo svojich Základoch pod pojmom priamka AB chápe úsečku AB) je čiara, ktorá je v každom svojom bode rovná.
 - Trojuholník ... (vyhľadajte definíciu \triangle , \odot , ... v Euklidových Základoch).
 - V skutočnosti sa predpokladá, že čitateľ vie, čo si má pod týmito pojmami predstaviť. Celkove Euklides uvádza **23** definícií.
2. **Axiómy - postuláty**, ktorých pravdivosť sa nespochybňuje.
3. **Odvođené pojmy** (Zásady, Common notion) sa definujú pomocou základných pojmov a prijatých axióm.
4. **Tvrdenia** (Proposition) sú dokazované pomocou základných pojmov, axióm a odvođených pojmov.

Euklides vo svojich Základoch uvádza len **päť axióm**:

Post 1: Nakresliť priamku z ľubovoľného bodu do ľubovoľného bodu.

Post 2: A priamku možno neohraničene na obe strany predĺžiť.

Post 3: A z akéhokoľvek bodu a akýmkoľvek polomerom možno narysovať kružnicu.

Post 4: A každé dva pravé uhly sú navzájom "zhodné".

Post 5: A keď priamka pretínajúca dve priamky tvorí s nimi na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, pretnú sa tieto priamky neohraničene predĺžené na tej strane, kde súčet uhlov je menší než dva pravé.

Prvé tri postuláty majú konštrukčný charakter, pričom popisujú skúsenosť z rysovania pomocou pravítka a kružidla. Tieto postuláty umožňujú v (euklidovskej) rovine:

- narysovať priamku prechádzajúcu dvoma danými bodmi;
- ľubovoľne predĺžiť úsečku;
- narysovať kružnicu s daným stredom a polomerom.

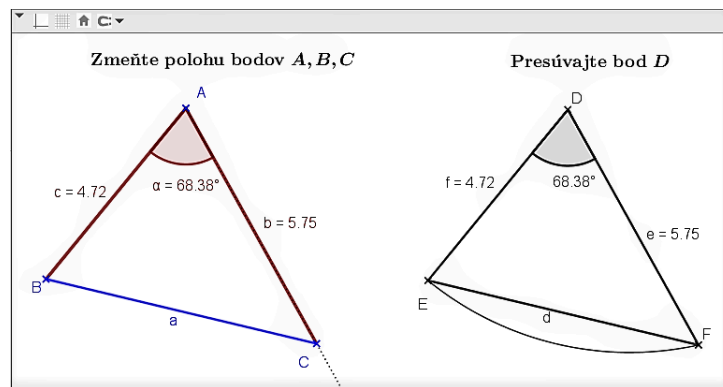
Piaty postulát so svojou nejasnou nezávislosťou od zvyšných postulátov má špecifické postavenie.

Matematici sa asi 2000 rokov snažili piaty postulát dokázať z predchádzajúcich alebo ho aspoň nahradiť niečím jednoduchším, zjavnejším. **Neúspešne.**

Za postulátmi nasledujú odvođené pojmy alebo **zásady**:

1. Ak sa dve rovnajú tretiemu, rovnajú sa aj navzájom. (Servít)
Veci, ktoré sa rovnajú tej istej veci, sa tiež navzájom rovnajú. (Preklad z angl. verzie.)
2. A ak sa rovným pridá rovné, sú aj celky rovné.
3. A ak sa od rovných odnímu rovné, sú aj celky rovné.
4. A útvary, ktoré sa (pohybom?) stotožňujú, sú navzájom rovné.
5. A celok je väčší ako časť.

- Nech trojuholník ABC je uložený na trojuholníku DEF a ak je bod A umiestnený na bode D a priamka AB na DE .
 - Potom bod B sa zhoduje s bodom E , pretože AB sa rovná DE .
 - Priamka AC sa tiež rovná DF , pretože uhol BAC sa rovná uhlu EDF .
 - Preto sa bod C zhoduje s bodom F , teda AC sa rovná DF .
 - Ale B a tiež zhoduje s E , a preto základňa BC sa zhoduje so základňou EF a rovná sa jej.
 - V opačnom prípade by bodmi E, F boli určené dve rôzne úsečky (priamky), čo je v spore s axiómou.
 - Takže celý trojuholník ABC sa zhoduje s celým trojuholníkom DEF .
 - Zvyšné uhly sa zhodujú so zostávajúcimi uhlami a rovnajú sa, uhol ABC sa rovná uhlu DEF a uhol ACB sa rovná uhlu DFE .
- C. Preto ak dva trojuholníky majú dve strany rovnobežné s dvoma stranami a majú uhly obsiahnuté rovnými čiarami rovnaké, potom majú aj základňu rovnú základni, trojuholník sa rovná trojuholníku a zvyšné uhly sú rovné zvyšným uhlom respektíve tým, ktoré sú oproti rovnakým stranám.



Dynamickú konštrukciu otvoríte [Tu](#).

Komentár k dôkazu tvrdenia T/IV je prevzatý a upravený z Euklidových Základov podľa Servíta.

Poznámka

Pri dokazovaní tohto tvrdenia sa predpokladá, že pri prenášaní úsečky (T/II, T/III) resp. uhla sa ich veľkosť nezmení. Toto v Hilbertovej sústave zabezpečujú axiomy zhodnosti.

Príklad

Je daný uhol $\angle ABC$ a kružnica $k = (B, r = BE)$. Na priamke \overleftrightarrow{CB} nájdite bod G tak, aby platilo $|\angle EGC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$.

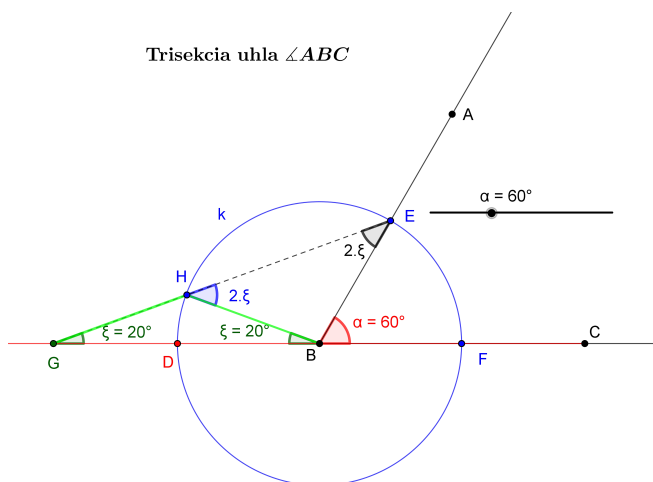
Riešenie

Nami predložená konštrukcia nie je riešenie známeho problému "trisekcia uhla". Pri riešení využívame postulát Post 2, ktorý zaručuje existenciu bodov D, H .

Konštrukcia umožňuje s dostatočnou presnosťou nájsť polohu bodu G tak, aby sa veľkosť úsečky GH približovala (postupným posúvaním bodu G po priamke \overleftrightarrow{CB}) k veľkosti polomeru BF a tým aj uhol $\angle EGC$ k $\frac{1}{3}$ veľkosti uhla α .

Ak si vopred stanovíme presnosť veľkosti $\frac{1}{3}|\angle ABC|$ na n desatinných miest, tak túto úlohu môžeme úspešne riešiť využitím skriptovania v programe GeoGebra.

Trisekcia uhla $\angle ABC$



Zmeňte veľkosť uhla α a posúvajte bod G tak, aby $H \in k$.

Otvorte si dynamickú konštrukciu [T1](#) a prehrajte si konštrukciu pomocou navigačného panela.

Rovnoramenný trojuholník

Euklidove definície (Servít: "Výmery")

Definícia 20

Z trojstranných útvarov je trojuholník:

- rovnostranný, ktorý má tri strany rovnaké;
- rovnoramenný, ktorý má len dve strany rovnaké;
- rôznostranný, ktorý má tri strany nerovnaké.

Definícia 21

Okrem toho z trojstranných útvarov je trojuholník:

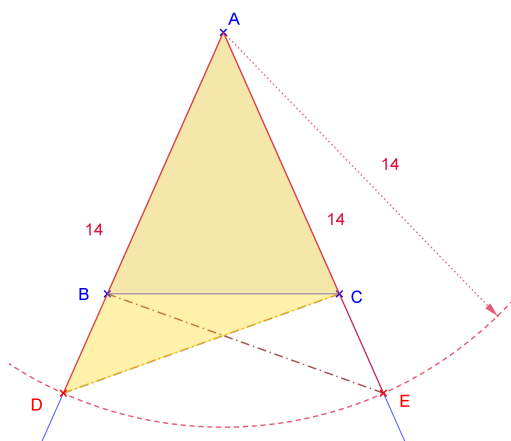
- pravouhlý, ktorý má pravý uhol;
- tupouhlý, ktorý má tupý uhol;
- ostrouhlý majúci tri uhly ostré.

Jedným z fundamentálnych Euklidových tvrdení, ktoré sa využíva v dôkazoch mnohých ďalších tvrdení je veta o zhodnosti uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka. Dôkaz tohto tvrdenia je typicky konštrukčný a zásadne sa líši od bežne používaného dôkazu v stredoškolskej matematike. V dôkaze sa vytvoria dva nové a zároveň zhodné trojuholníky podľa vety (sus). V konštrukcii sa používa len pravítko a kružidlo.

Kniha 1, Tvrdenie V

V rovnoramenných trojuholníkoch sa uhly pri základni navzájom rovnajú; a ak sa predĺžia rovnaké priamky (ramená), uhly pod základňou navzájom rovnajú.

Dôkaz



Otvorte si dynamickú konštrukciu [TU](#).

Veľmi poučný je aj dôkaz Tvrdenia XIII, ktorý je publikovaný v prvej knihe Základov. Toto tvrdenie zohráva významnú úlohu pri geometrii uhlov.

Kniha 1, Tvrdenie XIII

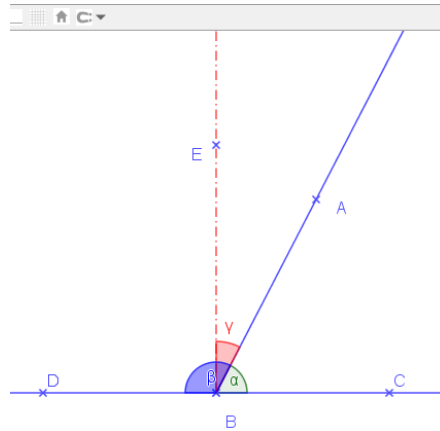
Ak priamka stojí na priamke, vytvára buď dva pravé uhly alebo uhly, ktorých súčet sa rovná dvom pravým

uhlom.

Dôkaz

Upravený podľa českého prekladu Euklidových Základov.

Nech akákoľvek priamka AB stojaca na priamke CD vytvára uhly CBA , ABD . Hovorím (Euklides), že buď uhly CBA , ABD sú dva pravé uhly alebo ich súčet sa rovná dvom pravým uhlom.



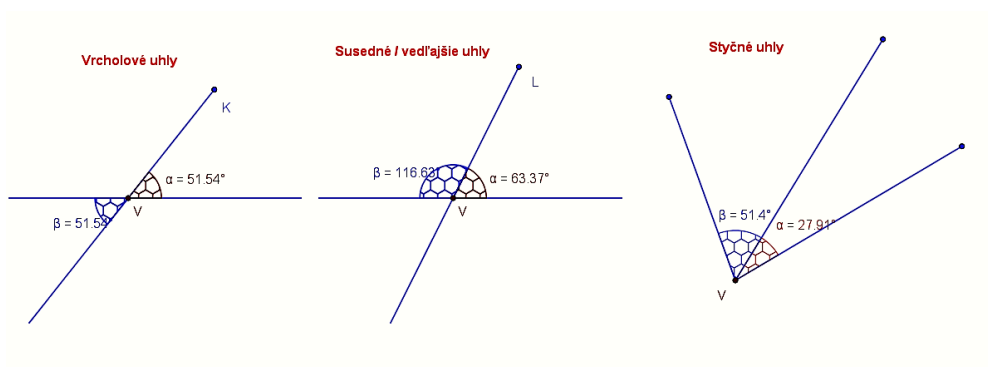
Otvorte si applet [Tu](#).

1. Ak sa teraz uhol CBA rovná uhlu ABD , potom sú to dva pravé uhly. [Def.10](#)
2. Ale ak nie, nakreslite BE z bodu B v pravom uhle k CD . Preto uhly CBE , EBD sú dva pravé uhly. [T/XI](#)
3. Pretože uhol CBE sa rovná súčtu dvoch uhlov CBA , ABE , pridajte uhol EBD ku každému, takže súčet uhlov CBE , EBD sa rovná súčtu troch uhlov CBA , ABE , EBD . [Z.2](#), [Z.4](#)
 - $\angle CBE = \alpha + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha + (\gamma + 90^\circ) = 180^\circ$
4. Pretože uhol DBA sa rovná súčtu dvoch uhlov DBE , EBA , ku každému z nich pridajte uhol ABC , preto sa súčet uhlov DBA , ABC rovná súčtu troch uhlov DBE , EBA , ABC . [Z.2](#), [Z.5](#)
 - $\beta = 90^\circ + \gamma$
5. Ale súčet uhlov CBE , EBD sa tiež ukázal byť rovný súčtu rovnakých troch uhlov a vecí, ktoré sa rovnajú rovnakému, sa rovnajú rovnako sebe, preto súčet uhlov CBE , EBD sa rovná súčtu uhlov DBA , ABC . Uhly CBE , EBD sú však dva pravé uhly, takže súčet uhlov DBA , ABC sa tiež rovná dvom pravým uhlom. [Z.1](#), [Z.6](#)
 - $\alpha + \beta = 180^\circ$
6. Preto ak priama čiara stojí na priamke, vytvára buď dva pravé uhly alebo uhly, ktorých súčet sa rovná dvom pravým uhlom.

Uhly

Definície

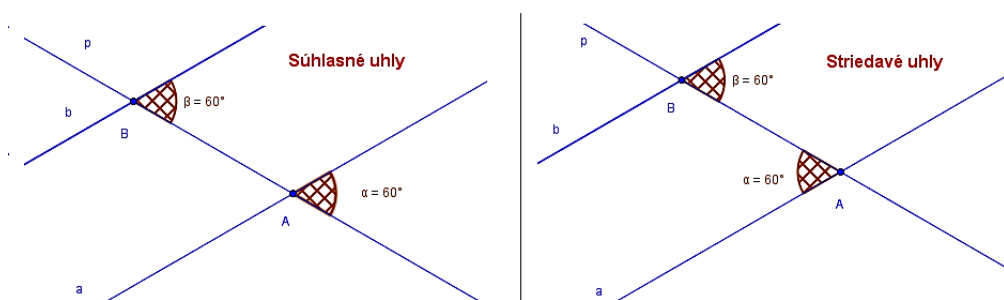
Uhly α , β nazývame **vrcholové** (obr. vľavo), **susedné/vedľajšie** (obr. uprostred) resp. **stýčné** (obr. vpravo).



Dynamický applet si otvoríte [Tu](#).

Definície

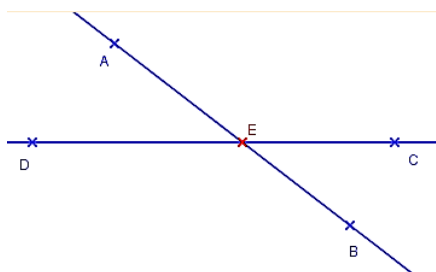
Sú dané dve **rovnoobežné** priamky a , b , ktoré pretína priamka p v bodoch A , B . Uhly α , β nazývame **súhlasné** (obr. vľavo) resp. **striedavé** (obr. vpravo).



Kniha 1, Tvrdenie XV

Ak sa dve priamky pretínajú, tvoria uhly vrcholové, ktoré sa navzájom rovnajú.

Nech sa priamky AB a CD pretínajú v bode E . Hovorím, že uhol CEA sa rovná uhlu DEB a uhol BEC sa rovná uhlu AED .



Applet otvoríte [Tu](#).

1. **Tvrdenie XIII:** Pretože priamka AE stojí na priamke CD tvoria uhly CEA a AED , súčet uhlov CEA a AED sa teda rovná dvom pravým uhlom.
2. Pretože priamka DE stojí opäť na priamke AB , takže uhly AED a DEB sa preto súčet uhlov AED a DEB rovná dvom pravým uhlom.
3. **Postulát 4:** Súčet uhlov CEA a AED sa však tiež ukázal ako rovný dvom pravým uhlom, preto sa súčet uhlov CEA a AED rovná súčtu uhlov AED a DEB .

4. **Odvožené pojmy - Zásady Z1, Z3:** Od každého odčítajte uhol AED . Potom zostávajúci uhol CEA sa rovná zostávajúcemu uhlu DEB .
5. Podobne je možné dokázať, že uhly BEC a AED sú rovnaké.
6. Preto, ak sa dve priamky pretínajú, tvoria uhly vrcholové, ktoré sa navzájom rovnajú.

Interpretujte a dokážte ďalšie Euklidove tvrdenia o uhloch.

Vety o trojuholníku

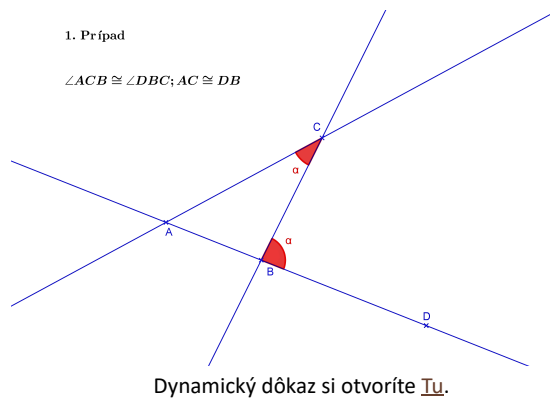
Medzi asi najznámejšie vlastnosti trojuholníka patria tvrdenia o veľkostiach jeho strán a vnútorných uhloch:

1. súčet veľkostí ľubovoľných dvoch strán je väčšia ako veľkosť tretej strany - **trojuholníková nerovnosť**
2. súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná priamemu uhlu - **súčet uhlov sa rovná 180°**.

Dôkazy týchto vlastností si vyžadujú pomocné tvrdenia o vzťahoch medzi stranami a uhlami trojuholníka, ktoré v tejto kapitole prezentujeme v originálnej podobe (v slovenskom preklade) ako ich publikoval Euklides vo svojich Základoch. Zároveň uvedieme ich interaktívne dôkazy v prostredí GeoGebra.

Kniha 1 Tvrdenie XVI

V každom trojuholníku, ktorého jedna strana sa predĺži, vonkajší uhol je väčší ako ktorýkoľvek protiľahlý vnútorný uhol.

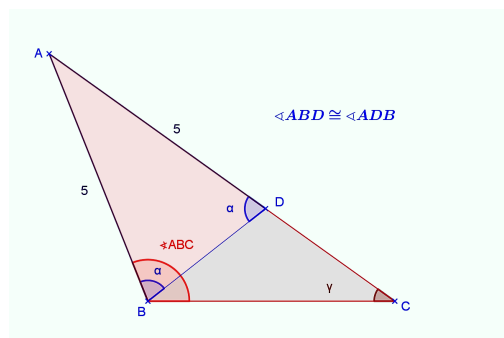


Kniha 1 Tvrdenie XVIII

V každom trojuholníku oproti väčšej strane leží väčší uhol.

Dôkaz

Nech ABC je trojuholník a nech strana AC je dlhšia ako AB . Hovorím, že tiež uhol ABC je väčší ako uhol BCA .



Otvorte si applet [TU](#).

1. Nech $|AC| > |AB|$, odrežme $AD \cong AB$ a vedme BD ... T/III, Post.1
2. A keďže vonkajším uhlom trojuholníka BCD je $\angle ADB$, je väčší protiľahlému vnútornému uhlu $\angle DCB$... T/XVI
3. Avšak $\angle ADB = \angle ABD$, ako aj strana $AB = AD$. ABD rovnoramenný
4. Teda tiež $\angle ABD > \angle ACB$... T/V
5. Mnohom väčší teda je $\angle ABC$ ako $\angle ACB$.

Kniha 1 Tvrdenie XIX

V každom trojuholníku oproti väčšiemu uhlu leží väčšia strana .

Dôkaz - otvorte si applet [T.u.](#)

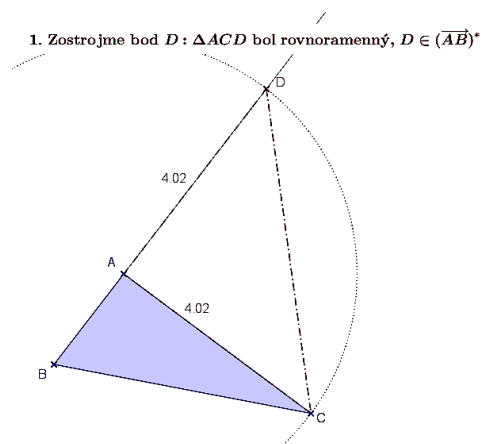
Nech ABC je trojuholník a nech $|\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BCA|$ hovorím (Euklides), že tiež strana AC dlhšia je ako strana AB .

1. Pretože ak nie, tak buď $|AC| = |AB|$ alebo AC je menšie ako AB .
2. Určite nie je (rovné) AC s AB , lebo rovným by bol tiež $\sphericalangle ABC$ s $\sphericalangle ACB$ avšak nie je. (Pozri Tvrdenie V.: Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú rovné.)
3. Teda AC nerovná sa AB .
4. Určite ani AC je menšie ako AB lebo aj $\sphericalangle ABC$ by bol menší ako $\sphericalangle ACB$, avšak nie je.
5. Teda nie je AC je menšie ako AB . Ukázalo sa, že však nie rovný. (Spor)

Kniha 1 Tvrdenie XX

V každom trojuholníku ktorékoľvek dve strany (súčtom) dvoch sú dlhšie ako strana ostávajúca.

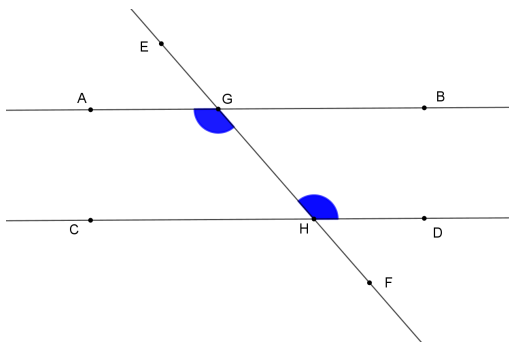
Dôkaz



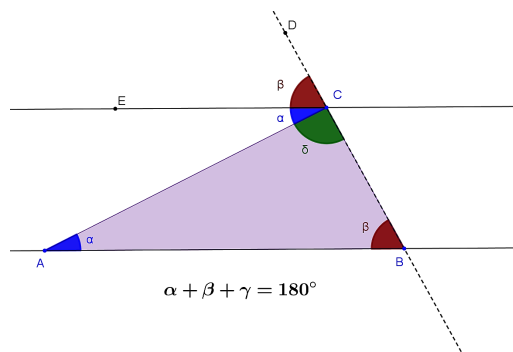
Otvorte si applet [T.u.](#)

Kniha 1 Tvrdenie XXIX (Striedavé uhly)

Priamka pretínajúca dve rovnobežné priamky vytvára striedavé uhly AGH, GHD navzájom rovnaké, vonkajší uhol EGB sa rovná vnútornému opačnému (súhlasnému) uhlu GHD a súčet vnútorných uhlov BGH, GHD na tej istej strane sa rovná dvom pravým uhlom.



Kniha 1 Tvrdenie XXXII (Súčet uhlov trojuholníka) V každom trojuholníku, ak sa jedna zo strán predĺži, tak sa vonkajší uhol rovná súčtu dvoch vnútorných protiľahlých uhlov a súčet troch vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná dvom pravým uhlom.



Dynamický dôkaz si otvoríte [Tu](#).

Euklidovské konštrukcie

Ako sme už uviedli, pri dokazovaní mnohých tvrdení týkajúcich sa vlastností geometrických útvarov, Euklides využíva hlavne konštrukčnú metódu. Pri podrobnejšom skúmaní týchto konštrukčných dôkazov zistíme, že navrhnuté konštrukcie sa dajú vo väčšine prípadov realizovať len použitím pravítka a kružidla. V odbornej literatúre sa takéto konštrukcie nazývajú euklidovské.

Definícia.

Grafická konštrukcia v euklidovskej rovine (alebo v euklidovskom priestore) realizovaná len

1. ideálnym **pravítkom** a ideálnym **kružidlom**
2. a konečným počtom krokov

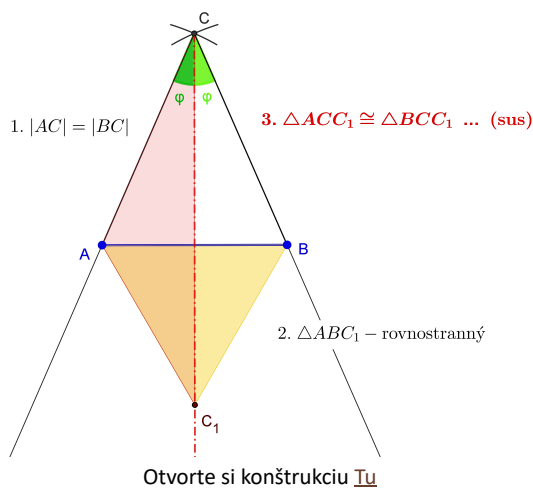
sa nazýva **Euklidovská konštrukcia**.

Každý krok elementárnej konštrukcie predstavuje zostrojenie

- i. priamky prechádzajúcej dvoma danými rôznymi bodmi alebo
- ii. kružnice so stredom v danom bode a s daným polomerom alebo
- iii. priesečníka dvoch rôznobežných priamok (resp. prieniku priamky a kružnice alebo prieniku dvoch kružníc).

Elementárne euklidovské konštrukcie

1. Zostrojenie rovnostranného trojuholníka. Kniha 1, Tvrdenie I.
2. Zostrojenie osi daného uhla. Kniha 1, Tvrdenie IX.
3. Zostrojenie stredu danej úsečky. Kniha 1, Tvrdenie X.
4. Zostrojenie osi úsečky.



5. Zostrojenie kolmice v danom bode na danú priamku. Kniha 1, Tvrdenie XI.

Mezi elementárne euklidovské konštrukcie zaraďujeme aj konštrukcie používané v školskej matematike už na 1. stupni ZŠ

6. "Prenesenie" danej úsečky na danú polpriamku. Kniha 1, Tvrdenie II a III.
7. "Prenesenie" daného uhla na danú polpriamku v danej polrovine.

Poznámky.

1. Podmienka konečného počtu krokov v definícii euklidovskej konštrukcii je opodstatnená. Napríklad konštrukcia uvedená v príklade v kapitole 2 nemôže byť euklidovská, lebo pri konečnom počte aproximácií nezískame trisekciu

uhla. Na druhej strane vieme stanoviť počet krokov, ktoré budú veľkosť trisekcie uhla určovať s vopred danou presnosťou .

2. Prvé tri uvedené elementárne konštrukcie nie je problém zrealizovať, ak máme k dispozícii pravítko a kružidlo. Pozrite si napríklad konštrukciu osi uhla a osi úsečky (úloha č. 4).
3. V geometrii, v ktorej neplatí piaty Euklidov postulát (neeuclidovské geometrie) to také jednoduché nebude. V prvom rade musíme nájsť odpoveď na otázku: "Čo budeme rozumieť pod pravítkom resp. kružidlom v takejto geometrii?".
4. V časti Neeuklidovská geometria popíšeme niektoré **elementárne euklidovské konštrukcie v neeuclidovskej geometrii**, ktoré budú tvoriť samostatnú triedu Euklidovských konštrukcií.

Podľa prof. Šedivého euklidovská konštrukcia sa považuje za zrealizovanú ak sú splnené podmienky K_1 až K_6 .

K_1 : Bod je zostrojený, ak je daná jeho poloha, alebo je priesečníkom dvoch priamok, dvoch kružníc alebo priamky a kružnice.

K_2 : Priamku považujeme za zostrojenú, ak sú dané jej dva rôzne body.

K_3 : Kružnicu $k(S, r)$ považujeme za zostrojenú, ak je daný bod S a úsečka r .

K_4 : Ak sú dané dve rôznobežky a, b , potom považujeme ich priesečník X za zostrojený.

K_5 : Ak je daná kružnica a jej sečnica, potom považujeme ich priesečníky $X_1 \neq X_2$ za zostrojené.

K_6 : Ak sú dané dve kružnice, o ktorých vieme, že sa pretínajú, potom považujeme ich priesečníky $X_1 \neq X_2$ za zostrojené.

Základné euklidovské konštrukcie môžeme považovať za elementárne stavebné kroky pri zostrojovaní zložitejších geometrických útvarov, pre ktorý sú dané nutné "generujúce" prvky.

Napríklad zostrojiť trojuholník, ak sú dané dve jeho strany a uhol nimi zovretý, je možné zrealizovať na základe vety **sus** o zhodnosti trojuholníkov [Kniha 1, Tvrdenie IV].

Definícia (konštrukčná úloha).

Zostrojenie (konštrukciu) geometrického útvaru z daných prvkov sa nazýva **konštrukčná úloha**.

Riešiť konštrukčnú úlohu znamená:

1. odvodiť vzťahy medzi zadanými a hľadanými prvkami - **náčrtok, rozbor**,
2. konštrukčne doplniť zadané prvky ďalšími tak, aby bol útvar zostrojiteľný - **postup konštrukcie** a jeho grafické prevedenie - **konštrukcia**,
3. urobiť dôkaz, že zostrojený útvar je ten, ktorý bolo treba zostrojiť - **dôkaz** správnosti konštrukcie,
4. stanoviť, za ktorých podmienok je úloha riešiteľná a prípadne koľko má vyhovujúcich riešení - **diskusia**.

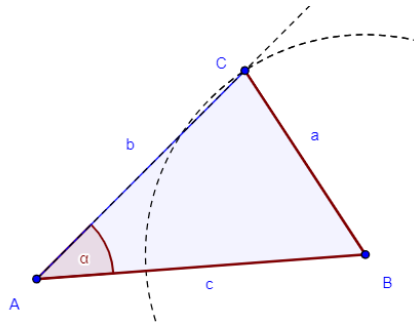
Príklad.

Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané strany a, c a uhol α pri vrchole A .

Rozbor - prvá etapa riešenia konštrukčnej úlohy, metóda: geometrické miesto bodov. V rozборе ide o hľadanie kauzalít medzi danými $c = AB, a, \alpha$ a hľadanými prvkami geometrického útvaru C .

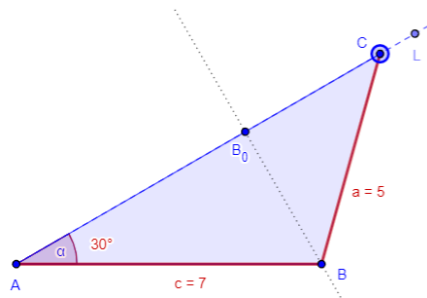
1. **Náčrtok** - súčasťou rozboru môže byť aj náčrt (na úrovni ZŠ je to dôležitá súčasť rozboru).
 - nakreslíme netypický trojuholník, náčrt kreslíme/modelujeme pomocou úsečiek, kružnicových oblúkov,
 - "silnejšie" resp. farebne vyznačíme strany $c = AB, a = BC$ a uhol BAC
2. **Logický rozbor**
 - strana AB je daná
 - vrchol C leží na ramene uhla α

- zároveň leží na kružnici $k(B, r = a)$



Applet si otvoríte [Tu](#).

3. Algebraická metóda rozboru



Obrázok aktivujete [Tu](#).

- Vypočítajme veľkosť úsečky AC .
- Nech $d = BB_0$ je vzdialenosť bodu B od priamky AL .
- Potom $d = c \cdot \sin \alpha$.
- Trojuholníky ABB_0 a BCB_0 sú pravouhlé.
- Pytagorova veta: $AB_0 = c^2 - d^2, CB_0 = b^2 - d^2$.
- Veľkosť strany $b = AB_0 + CB_0$.

Záver analýzy

Z rozboru vyplýva postup konštrukcie trojuholníka ABC : strana $c = AB$; uhol BAL ; kružnica $k(B, r = a)$... vrchol C je priesečník ramena uhla a kružnice.

Konštrukcia - druhá etapa riešenia konštrukčnej úlohy

Konštrukcia sa skladá z dvoch častí: **grafická konštrukcia** (narysovanie hľadaného útvaru) a **zápis** krokov (robí sa vedľa). Stiahnite si applet [Tu](#).

Dôkaz - tretia etapa riešenia konštrukčnej úlohy. Dôkazom sa chápe argumentácia, či útvar vytvorený konštrukciou spĺňa všetky požiadavky uvedené v zadaní úlohy. V našom príklade dôkaz vyplýva z postupu konštrukcie.

Diskusia - štvrtá etapa riešenia konštrukčnej úlohy

1. V diskusii určujeme za akých podmienok je úloha riešiteľná, prípadne určujeme koľko má vyhovujúcich riešení resp. skúmame závislosť riešenia od zadaných prvkov.
2. V tejto úlohe výhodne vyžijeme posuvníky a počet riešení odvodíme od vzájomnej polohy daných prvkov.

Nech $d = c \cdot \sin \alpha$ je vzdialenosť bodu B od priamky AL , potom počet priesečníkov C_i závisí na hodnotách a, d, α . Musíme rozlíšiť dve základné situácie:

1. Pokiaľ platí, že $0 < \alpha < 90^\circ$, potom je $0 < d < c$ a úloha
 - a) nemá riešenie, ak $0 < a < d$

- b) má práve jedno riešenie pre $a = d$ alebo $a \geq c$
 - c) má práve dve riešenia za podmienky $d < a < c$.
2. Pre $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ je diskusia jednoduchšia, úloha
- a) nemá riešenie za podmienky $0 < a \leq c$
 - b) má práve jedno riešenie, pokiaľ platí $a > c$.

Poznamenajme, že k úsečke AB existujú dva uhly ABL a ABL' veľkosti α , čo zdvojnásobuje počet riešení. Sú však osovo symetrické.

Hilbertov axiomatický systém

V roku 1899 slávny matematik David Hilbert publikoval prácu Grundlagen der Geometrie, v ktorej navrhuje axiomatický systém, nahrádzajúci tradičné axiomy Euklida. V literatúre je tento axiomatický systém známy ako **Hilbertov axiomatický systém**. V práci [HIL] je uvedených šesť primitívnych pojmov, ktoré sú začlenené do dvoch skupín:

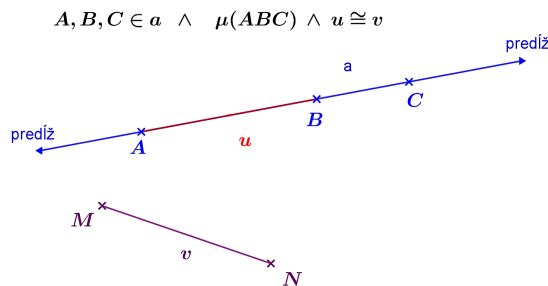
1. Primitívne objekty

- **body** - označujeme veľkými písmenami latinskej abecedy A, B, C, \dots ;
- **priamky** - na označenie používame malé písmená a, b, c, \dots a
- **roviny** - označujeme malými gréckymi písmenami $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

2. Primitívne vzťahy (binárne relácie)

- **incidencia** - $A \in a$ ["bod A leží na priamke a ", "priamka a prechádza bodom A ", "bod A a priamka a sú incidentné"].
- vzťah "**medzi**" - $\mu(ABC)$ [usporiadanie troch kolineárnych bodov A, B, C , kde bod B leží medzi bodmi A, C]; používa sa aj označenie $A * B * C$. Pozri prácu [Chal]
- **zhodnosť** (kongruencia) - $u \cong v$ ["úsečka u je zhodná s úsečkou v "], zhodnosť uhlov, zhodnosť trojuholníkov.

Primitívne objekty **nedefinujeme**, vieme však jednoznačne rozhodnúť o (primitívnych) vzťahoch medzi nimi.



Otvorte si interaktívny applet [Tu](#).

Hilbertov axiomatický systém pozostáva z **piatich** skupín axióm.

1. axiomy incidencie
2. axiomy usporiadania
3. axiomy zhodnosti (kongruencie)
4. axioma o rovnobežnosti
5. axiomy spojitosti

Axiómy charakterizujú vzťahy medzi primitívnymi objektmi. Axiomatický systém obsahuje celkom 20 axióm.

Body P_1, P_2, P_3, \dots nazývame **kolineárne**, ak existuje priamka so všetkými týmito bodmi incidentná.

Axiómy incidencie v rovine

- I1: Dvoma rôznymi bodmi A, B prechádza práve jedna priamka.
- I2: Každá priamka obsahuje aspoň dva rôzne body.
- I3: Existuje aspoň jedna trojica navzájom rôznych nekolineárnych bodov.

Axiómy incidencie v priestore

- I4: Troma nekolineárnymi bodmi A, B, C prechádza práve jedna rovina.
- I5: V každej rovine existujú aspoň tri nekolineárne body.
- I6: Ak dva rôzne body A, B priamky p ležia v rovine α , potom každý bod priamky p leží v rovine α .

17: Ak dve roviny α, β majú spoločný bod A , potom majú spoločný ešte aspoň jeden bod B , rôzny od A .

18: Existuje aspoň jedna štvorica nekomplanárnych bodov A, B, C, D .

Tvrdenie

Ak p, q sú dve rôzne priamky, potom p a q majú najviac jeden spoločný bod.

Dôkaz. nepriamo

- predpokladajme, že $p \neq q$ a zároveň $A, B \in p \cap q$;
- potom $A \in p, B \in p$ a zároveň $A \in q, B \in q$;
- podľa axiómy I1 existuje priamka \overleftrightarrow{AB} je určená bodmi A, B ;
- a zároveň podľa axiómy I1 bude $p = \overleftrightarrow{AB}$, lebo $A, B \in p$;
- podobne zistíme, že $q = \overleftrightarrow{AB}$;
- a teda musí platiť $p = q$, čo je spor s predpokladom sú totožné.

V ďalšej časti sa zameriame na interpretáciu Euklidovskej roviny pomocou dynamických geometrických systémov (DGS). Budeme používať softvér GeoGebra. Vo všeobecnosti ak DGS má správne interpretovať danú geometriu (napr. Euklidovskú), tak je nutné vhodne popísať/definovať základné geometrické pojmy a vzťahy. Túto požiadavku výstižne charakterizuje doc. Vallo vo svojej habilitačnej práci, kde zdôrazňuje požiadavku determinovanosti pri využívaní IKT v geometrii.

V DGS je nutné, aby dôležité prvky geometrických útvarov boli **deterministicky definované** (Vallo, 2021).

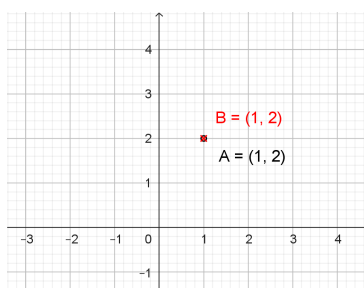
Uvádzame niekoľko východísk, ktoré tvorcovia softvéru GeoGebra naprogramovali v jeho základnej verzii. Vo vzhľade *Nákresňa* (2-rozmerný priestor) je bod reprezentovaný dvojicou reálnych čísel. Tento model je izomorfny s afinným dvojrozmerným priestorom nad poľom reálnych čísel.

Požiadavka determinovanosti z pohľadu geometrie znamená **presne stanoviť, čo predstavuje bod so súradnicami** (a, b) .

Presné geometrické vymedzenie (determinovanosť) veľmi dobre interpretujú nasledovné príkazy softvéru GeoGebra.

1. Príkaz $A = (a, b)$ vygeneruje na zobrazovacej ploche bod so súradnicami (a, b) a s popisom A .
2. Príkaz $B = (a, b)$ vygeneruje opäť bod s tými istými súradnicami a s popisom B .

Obidva body sa budú prekrývať a budú prezentovať dva totožné body. Môžeme ich aj farebne odlíšiť, čo sa zjavne prejaví pri dynamickej zmene bodu B .



Otvorte si applet [Tu](#).

Pri klasickej výučbe geometrie (manuálne rysovacie prostriedky) je problematické reálne „pracovať“ s totožnými (identickými) útvarmi. Napríklad dva rôzne ale totožné body rozlíšime len tak, že pri ich popise uvedieme $A = B$.

Poznámka.

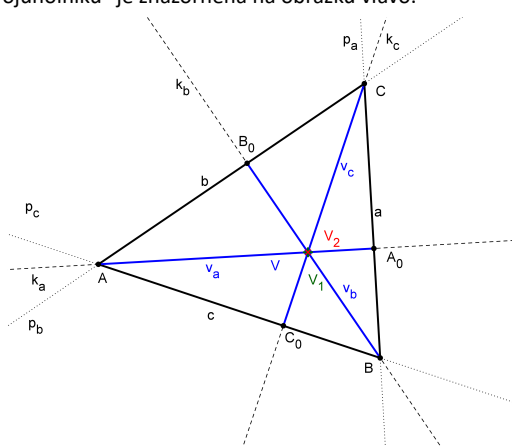
V DGS priesečník dvoch priamok sa musí exaktne definovať pomocou nástroja *Priesečník*. Ak nie, tak DGS ho neidentifikuje ako bod.

Pomocou nástroja "Priesečník" môžeme vytvoriť tri priesečníky výšok v trojuholníku

1. $V \in k_a \cap k_b$
2. $V_1 \in k_b \cap k_c$
3. $V_2 \in k_c \cap k_a$,

o ktorých vieme dokázať (Kapitola "Významné prvky trojuholníka"), že sú to **tri totožné body**.

DGS to chápe ako tri samostatné body. Pomocou nástroja "Vzťah $a = b$ " môžeme napríklad overiť, či bod $V_1 \in k_b \cap k_c$ leží aj na kolmici k_a . GeoGebra nám zobrazí oznam/výsledok, ktorý predstavuje obrázok vpravo. Celá konštrukcia "Priesečník výšok v trojuholníku" je znázornená na obrázku vľavo.



Vo všeobecnosti platí, že:

- V_1 leží na k_a

pokiaľ je splnená podmienka:

- A a B sa nerovnajú

Otvorte si dynamickú konštrukciu [TU](#).

Modely geometrie

V predchádzajúcej časti sme stručne načrtli interpretáciu základných pojmov (bod, priamka, incidencia a pod.) v programe GeoGebra. Interpretácia týchto pojmov môže mať rôzne podoby.

Ak priradíme základným pojmom nejaký konkrétny význam, tak vytvoríme model geometrie.

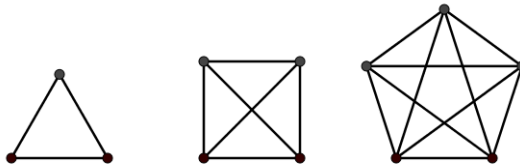
Potom v tomto modeli môžeme skúmať, či platia axiómy v systéme, ktorý sme zaviedli. Ak sú axiómy v tejto interpretácii (v modeli geometrie) pravdivé, potom takto vytvorený model je modelom daného axiomatického systému.

Uvádzame niekoľko modelov geometrie.

Incidenčné modely geometrie

1. Trojbodová (prípadne štvorbodová, päťbodová) geometria

- A, B, C sú body a $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ sú priamky resp. **Kompletný graf** s 3 (prípadne so 4 resp. 5 vrcholmi).



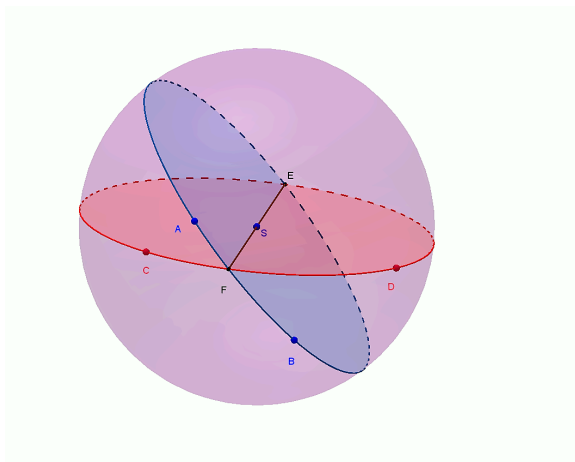
- Euklidov postulát o rovnobežkách neplatí.
- Overte platnosť axióm incidencie.

2. Algebraický model - **analytická geometria** euklidovskej roviny

- Body sú usporiadané dvojice (a_1, a_2) reálnych čísel.
- Priamky sú lineárne rovnice $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$).
- Incidencia: $A = (a_1, a_2) \in p(ax + by + c = 0) \Leftrightarrow (a_1, a_2)$ je riešením rovnice $ax + by + c = 0$.
- Model je reprezentovaný vzhľadom **Nákresňa** v programe GeoGebra.

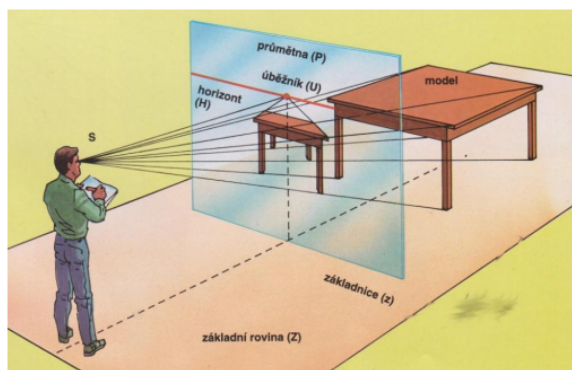
Sféra ako **neincidenčný** model

- Bodmi sú body na guľovej ploche (sfére). Priamkami sú kružnice na sfére so stredom v strede gule.
- **Každé dve priamky sa pretínajú** v dvoch bodoch, preto nejde o model incidenčnej geometrie. Otvorte si applet a pohybuje bodmi A, B, C, D .



Otvorte si interaktívny applet [T_u](#)

Lineárna perspektíva (15. stor.) - projekcia bodov trojrozmerného priestoru do roviny (na plátno).



Prevzaté z: Parramón, José M.: Perspektiva pro výtvarníky, Praha : JAN VAŠUT, 1998, ISBN 80-7236-041-8

Otvorte si projekciu bodov v GeoGebra modeli [TU](#). Porovnajete s pohľadom na koľajnice. Pohľad na koľajnice je vlastne zobrazenie v lineárnej perspektíve.

Zhodnosť

Axiómy zhodnosti

Z1: Pre ľubovoľné dva rôzne body A, B a polpriamku vychádzajúcu z bodu A' existuje na tejto polpriamke práve jeden bod B' taký, že $AB \cong A'B'$.

Z2: Ak $AB \cong A'B'$ a $AB \cong A''B''$, potom $A'B' \cong A''B''$.

Navyše, každá úsečka je zhodná sama so sebou: $AB \cong AB$.

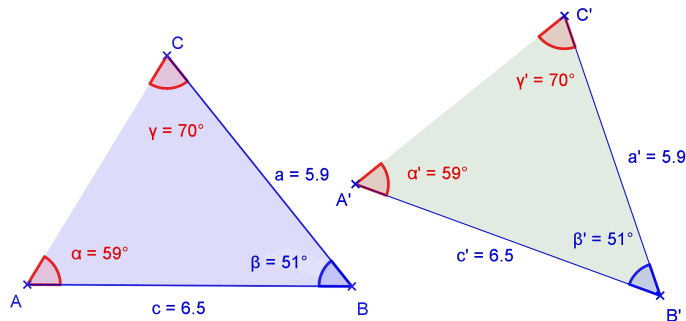
Z3: Ak $\mu(ABC), \mu(A'B'C'), AB \cong A'B'$ a $BC \cong B'C'$, potom $AC \cong A'C'$.

Z4: Pre daný uhol $\angle ABC$, danú polpriamku $\overrightarrow{B'A'}$ a danú polrovinu ohraničenú priamkou $\overleftrightarrow{A'B'}$ existuje práve jedna polpriamka $\overrightarrow{B'C'}$ v danej polrovine tak, že $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$.

Z5: Ak $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ a $\angle ABC \cong \angle A''B''C''$, potom $\angle A'B'C' \cong \angle A''B''C''$.

Navyše, každý uhol je zhodný sám so sebou: $\angle ABC \cong \angle ABC$.

Z6: Ak pre trojuholníky ABC a $A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B', BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle C \cong \angle C'$.



Otvorte si dynamickú konštrukciu [Tu](#) a presuňte trojuholník $\triangle A'B'C'$ na trojuholník $\triangle ABC$.

Definícia.

Hovoríme, že trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú **zhodné**, označujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ak

$AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C'$ a $\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$.

Veta sus. (Euklidove Základy, Tvrdenie I.4)

Ak pre trojuholníky ABC a $A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B', BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.

Dôkaz.

V dôsledku axiómy Z6 stačí ukázať, že $AC \cong A'C'$. Dôkaz urobíme sporom. Nech

$$AC \not\cong A'C'.$$

Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'} : A'C'' \cong AC$, pre ktorý platí $C' \neq C''$. Použitím axiómy Z6 dostaneme, že

$$\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C'',$$

čo je v rozpore s axiómou Z4 o prenášaní uhla. Teda musí platiť $C' = C''$.

Poznámky.

1. Symbol $\angle A$ použitý v axiómach predstavuje označenie pre uhol s vrcholom A resp. pre jeho veľkosť.
2. Niekedy sa veta sus uvádza ako axióma Z6.
3. Porovnajte nami prezentovaný dôkaz vety sus s dôkazom v uvedenom v Euklidových Základoch.
4. Ďalšie vety o zhodnosti trojuholníkov nájdete v samostatnej e-knihe tohto kurzu.

V **Hilbertovom axiomatickom systéme** axiómy Z1 a Z4 zaručujú **jednoznačnosť prenášania**

1. danej úsečky na danú polpriamku - Z1
2. uhla danej veľkosti do polroviny - Z4

V **Euklidových Základoch** sú tieto axiomatické pojmy uvádzané ako **konštrukcie**. Prenášanie úsečky (**Tvrdenie I.3**) sa popisuje pomocou kružnice. Prenášanie uhla (vyhľadajte v prvej knihe Euklidových Základov).

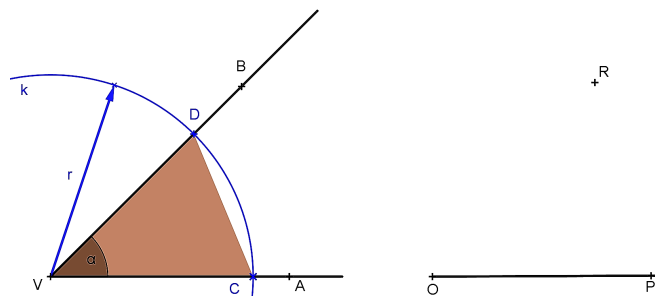
Definícia.

Nech $S \in E_2$ je ľubovoľný bod a r je daná nenulová úsečka. **Kružnica** so stredom S a polomerom r je množina všetkých bodov $X \in E_2$, pre ktoré platí, že úsečka SX je zhodná s úsečkou r .

$$k(S; r) := \{X \in E_2; SX \cong r\}$$

Definície ďalších geometrických útvarov budeme uvádzať priebežne podľa potreby.

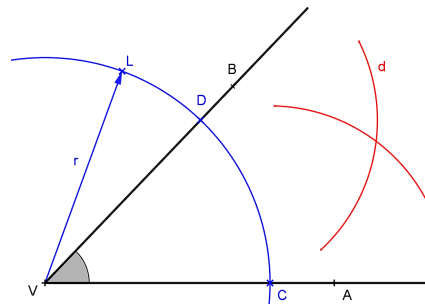
Axióma Z4 predstavuje euklidovskú konštrukciu prenášania uhla do danej polroviny. Vo vyučovaní geometrie na ZŠ sa táto konštrukcia uskutočňuje pomocou listu papiera alebo pomocou kružidla. Dynamickú formu aktivity prenášania uhla pomocou kružidla, ktorá je vhodná pre žiakov základných škôl, predstavuje nasledujúci applet.



Otvorte si applet [Tu](#)

1. Uhol $\alpha = \angle AVB$ je zhodný s uhlom $\angle POQ$.
2. Zapisujeme $\angle AVB \cong \angle POQ$.
3. Čítame: uhol α ($\angle AVB$) je zhodný s uhlom $\angle POQ$.

Kružnica sa využíva aj pri euklidovskej konštrukcii osi uhla Kniha 1, Tvrdenie IX ako ukazuje nasledujúci obrázok.



Otvorte si applet [Tu](#). Porovnajte s Euklidovou konštrukciou [Tu](#).

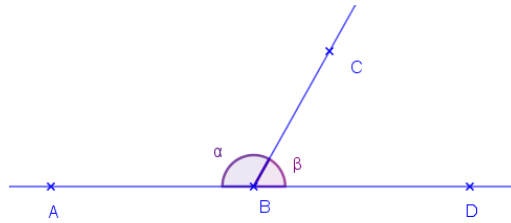
V predchádzajúcich dvoch euklidovských konštrukciách sa mimovoľne predpokladalo, že **pri prenášaní úsečky jej veľkosť sa nemení**. V Hilbertovom axiomatickom systéme vlastnosť zachovávanie "veľkosti útvaru" pri "prenášaní" sa zaručuje pomocou axióm Z1 a Z4.

Rozdiel medzi Euklidovými Základmi a Hilbertovým axiomatickým prístupom je zásadný, ktorý podrobnejšie popíšeme v nasledujúcej podkapitole.

Geometria uhlov

Definícia (Susedné uhly).

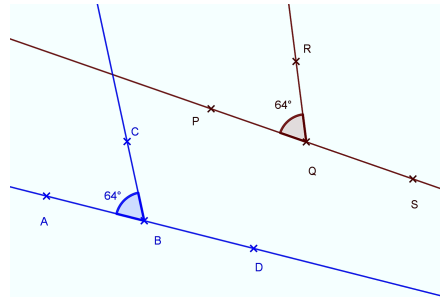
Uhly $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle CBD$ sa nazývajú **susedné**, ak ramená \vec{BA} , \vec{BD} tvoria opačné polpriamky.



Tvrdenie.

Ak sú dva uhly zhodné, potom aj ich susedné uhly sú zhodné.

Dôkaz.



Otvorte si applet [Tu](#).

Definícia (Vonkajší uhol trojuholníka).

Vonkajší uhol trojuholníka je uhol susedný s príslušným vnútorným uhlom trojuholníka.

Napríklad v predchádzajúcej vete je uhol $\angle DBC$ vonkajší uhol k uhlu $\alpha = \angle ABC$. Existenciu bodu D zabezpečuje axióma Z1 a axióma U2.

Tvrdenie.

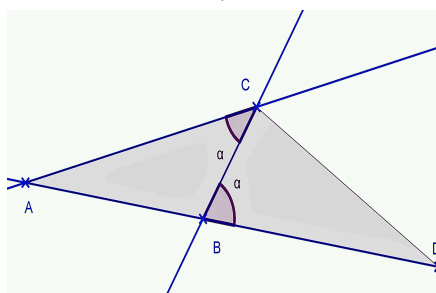
Vonkajší uhol $\angle DBC$ v trojuholníku ABC susedný k uhlu $\angle ABC$ je väčší ako ľubovoľný zo zvyšných dvoch vnútorných uhlov tohto trojuholníka. Symbolicky zapísané

$$\angle DBC > \angle BCA \text{ a zároveň } \angle DBC > \angle BAC.$$

Dôkaz.

Stačí, keď dokážeme platnosť prvého a druhého prípadu. Budeme dokazovať sporom.

1. Nech platí $\angle DBC \cong \angle BCA$ a zároveň nech $AC \cong BD$, potom $\triangle ACB \cong \triangle DBC$.



Otvorte si applet [Tu](#).

Odtiaľ dostávame

$$\angle ABC \cong \angle BCD.$$

Zároveň zo zhodnosti $\angle DBC \cong \angle BCA$ a z tvrdenia o susedných uhloch dostávame $\angle ABC \cong \angle BCY$, kde Y je bod na polpriamke \overrightarrow{AC} taký, že $\mu(ACY)$.

Polpriamky $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CY}$ obe zvierajú s \overrightarrow{CB} rovnaký uhol, pričom body D, Y ležia na tej istej strane od \overleftrightarrow{CB} (sú oba na opačnej ako A). **To je spor s axiómou Z4.**

2. Nech platí

$$\angle DBC < \angle BCA,$$

potom existuje polpriamka \overrightarrow{CZ} medzi polpriamkami $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$ tak, že platí

$$\angle BCZ \cong \angle CBX.$$

Teraz tento prípad prevedieme na prvý prípad, ktorého platnosť sme už dokázali. Polpriamka \overrightarrow{CZ} pretína úsečku AB (veta o pričke uhla, Chalmovianska, str. 19) v bode E . Potom v trojuholníku EBC je vonkajší uhol pri vrchole B zhodný s vnútorným uhlom pri vrchole C . To je ale predpoklad prvého prípadu. To však viedlo k sporu, preto nemôže nastať ani druhý prípad.

3. V ďalších dvoch prípadoch $\angle CBD \cong \angle A$; $\angle CBD < \angle A$ postupujeme analogicky.

3. Prípad

$$\angle BAC \cong \angle CBD$$

Veta o susedných uhloch α

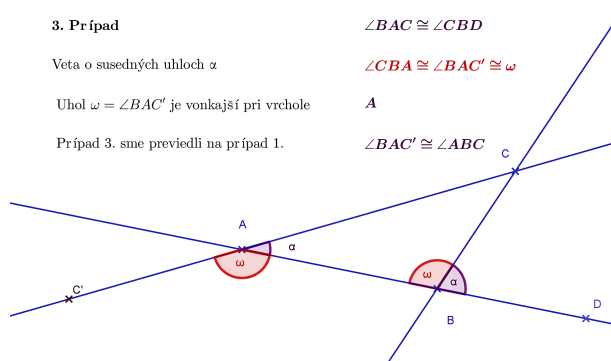
$$\angle CBA \cong \angle BAC' \cong \omega$$

Uhol $\omega = \angle BAC'$ je vonkajší pri vrchole

A

Prípad 3. sme previedli na prípad 1.

$$\angle BAC' \cong \angle ABC$$



Otvorte si applet [Tu](#).

Poznámky.

1. Euklides tvrdenie o vonkajšom uhle (uvádza vo svojich Základoch ako tvrdenie T/XVI, pozrite [Tu](#)) dokazuje pomocou zhodnosti vrcholových uhlov. V dôkaze využíva vlastnosť (ktorú bližšie nešpecifikuje), že pri "prenášaní" úsečky sa jej veľkosť nemení.
2. V Euklidovom dôkaze kľúčovým momentom je predpoklad, že polpriamka \overrightarrow{CE} leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}$. To Euklides pokladá za všeobecne platnú Zásadu. U Hilberta je to podložené axiómami zhodnosti a usporiadania.
3. Zhodnosť vrcholových uhlov dokazuje pomocou vlastnosti, že súčet susedných uhlov sa rovná dvom pravým uhlom. Tvrdenie T/XV, dôkaz pozrite [Tu](#).
4. V stredoškolskej matematike sa táto veta uvádza ako **Teoréma vonkajšieho uhla**. Pozri Wikipédiu [Tu](#)

Usporiadanie

Axiómy usporiadania

U1: Ak B leží medzi A a C [$\mu(ABC)$], potom A, B, C sú tri rôzne kolineárne body a platí tiež, že B leží medzi C a A .

U2: Pre ľubovoľné navzájom rôzne body A, C existujú body B, D tak, že $\mu(ABC)$ a $\mu(ACD)$.

U3: Pre ľubovoľné tri navzájom rôzne kolineárne body práve jeden z nich leží medzi zvyšnými dvoma.

U4: (Paschova axióma, 1882) Nech priamka p neprechádza žiadnym z nekolineárnych bodov A, B, C .

Ak p pretína úsečku AB , potom pretína buď úsečku AC alebo úsečku BC .

Definície.

1. Nech A, B sú dva rôzne body. **Úsečka** AB je množina bodov X , ktoré ležia medzi bodmi A, B zjednotená s dvojprvkovou množinou $\{A, B\}$. Body A, B sú krajné body úsečky.

$$AB := \{X; \mu(AXB)\} \vee X \in \{A, B\}$$

2. Nech A, B sú dva rôzne body. **Polpriamka** \overrightarrow{AB} je množina bodov úsečky AB a bodov X , pre ktoré platí $\mu(ABX)$.

$$\overrightarrow{AB} := \{X \in AB \vee \mu(ABX)\}$$

3. Nech A, B sú dva rôzne body. **Opačná polpriamka** k polpriamke \overrightarrow{AB} je množina bodov X , pre ktoré platí, že bod A leží medzi bodmi B, X zjednotenú s jednobodovou množinou $\{A\}$.

$$\overleftarrow{AB} := \{X = A \vee \mu(BAX)\}$$

Znázornite všetky tri situácie v GeoGebre. Pozrite si prácu [MON].

Tvrdenie.

Pre ľubovoľné dva rôzne body A, B platí:

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB.$$

Dôkaz.

Z definície polpriamky dostávame

$$AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}.$$

Potrebujeme ešte dokázať, že platí $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \subset AB$. Zvoľme si ľubovoľný bod C , pre ktorý platí

$$C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}.$$

1. Nech $C = A$ alebo $C = B$, potom dokazovaná inklúzia platí.

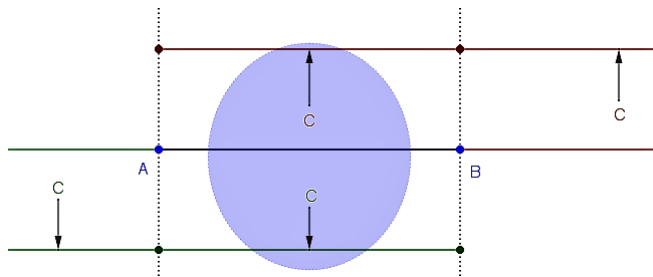
2. Nech $C \neq A, C \neq B$. Keďže $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, tak musí súčasne platiť

- $C \in \overrightarrow{AB}$ (horná časť appletu), v tom prípade z definície polpriamky dostávame, že

$$\mu(ACB) \text{ alebo } \mu(ABC).$$

- podobne pre $C \in \overrightarrow{BA}$ (dolná časť appletu) je buď $\mu(BCA)$ alebo $\mu(BAC)$.

Súčasne môže nastať len prípad $\mu(ABC)$. Záver: z axiómy U3 dostávame: $\mu(ABC) \Leftrightarrow C \in AB$.



Otvorte si applet [Tü](#).

Cvičenie.

Dokážte, že platí:

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}.$$

Dôkaz.

Dôkaz je nutné rozložiť do dvoch krokov (dokazujeme rovnosť množín).

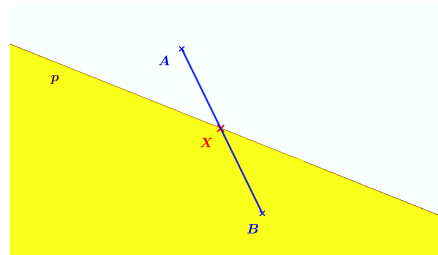
1. Nech $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, potom treba dokázať $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Použite definíciu polpriamky.
2. Nech $C \in \overleftrightarrow{AB}$, potom treba dokázať $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Použite definíciu priamky.

Uvedomte si, že pre polohu (Pozri práca [CHAL, str. 16] bodu $C \in \overleftrightarrow{AB}$ vzhľadom na A, B máme možnosti: $\mu(CAB)$, $C = A$, $\mu(ACB)$, $C = B$, $\mu(ABC)$. Prvé tri možnosti znamenajú, že $C \in \overrightarrow{BA}$

Definícia.

Daná je priamka p a body A, B neležiace na tejto priamke. Hovoríme, že **body** A, B

- ležia na opačných stranách od danej priamky, ak úsečka AB túto priamku pretína, t.j. ak na tejto priamke existuje bod X tak, že $\mu(AXB)$
- ležia na tej istej strane od priamky p , ak $A = B$ alebo ak $A \neq B$ a úsečka AB priamku p nepretína ($p \cap AB = \emptyset$)



Otvorte si interaktívny applet [Tu](#).

Príklad.

Dané sú tri nekolineárne body A, B, C . Určte množinu (šrafovaním)

$$\{X; XC \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset\}.$$

Konštrukčný návod [Tu](#). Applet, v ktorom je nástroj na vyznačenie polroviny [Tu](#).

Riešenie [Tu](#).

Tvrdenie (separačná vlastnosť v rovine, U4S).

Priamka p delí rovinu okrem bodov priamky p na dve triedy tak, že body ležia v tej istej triede práve vtedy, keď ležia na tej istej strane od priamky p . (t.j. neexistuje bod $X \in p$ taký, že $\mu(AXB)$, kde A a B sú dané body).

Dôkaz pozri prácu [CHAL].

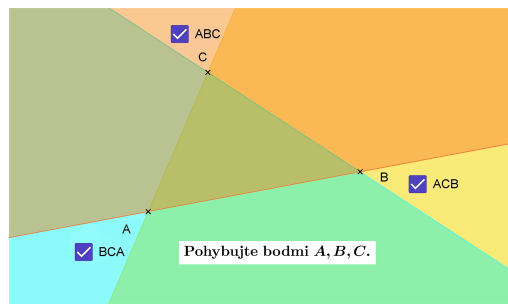
Definície.

1. Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod **polrovinou** \overrightarrow{ABC} rozumieme množinu bodov X , pre ktoré platí, že prienik úsečky XC s priamkou \overleftrightarrow{AB} je prázdna množina, alebo jednoprvková množina, ktorej prvkom je práve bod X .

$$\overrightarrow{ABC} := \{X \in E_2; XC \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset \vee XC \cap \overleftrightarrow{AB} = \{X\}\}$$

2. Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod **trojuholníkom** ABC rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$.

$$\triangle ABC := \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$$



Otvorte si interaktívny applet [Tu](#).

Pozrite si tiež definície v práci [MON] kapitola 2: "Konvexná množina".

Rovnoběžnosť

Definícia (Rovnoběžnosť).

Euklides: Rovnoběžky jsou přímky, které jsou v téže rovině a prodlouženy na obě strany do nekonečna nikde se nesbíhají. (Servít)

Hilbert: **Dve priamky sú rovnobežné (rovnobežky), ak nemajú spoločný bod.**

Tvrdenie (Základy, T/XXVII).

Keď priamka pretínajúca dve priamky vytvára striedavé uhly navzájom rovnaké, budú tie priamky navzájom rovnobežné.

Dôkaz.

Urobte si cvičenie. Použite dôsledok vety o vonkajšom uhle.

Dôsledok - existencia rovnobežky.

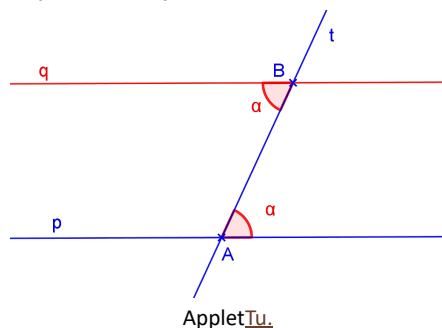
Nech bod B neleží na priamke p . Potom existuje priamka q taká, že $B \in q \wedge p \parallel q$.

Dôkaz.

Zvoľme si ľubovoľný bod A na priamke p . Zostrojme priamku $t = AB$ (transverzála/priečka priamok p, q).

Následne zostrojíme priamku $q : B \in q$ tak, aby striedavé uhly pri priamkach p, q s transverzálou t boli rovnaké (axióm Z4).

Rovnoběžnosť p, q vyplýva z vety o vonkajšom uhle trojuholníka.



Poznámka.

Dokázaním predchádzajúceho dôsledku sme ukázali **existenciu rovnobežky**, pričom sme použili predchádzajúce axiómy.

Teraz stačí formulovať axiómu, ktorá zaručí **jednoznačnosť** - existenciu jedinej rovnobežky.

Playfairova axióma.

Pre každú priamku p a pre každý bod $B \notin p$ existuje **práve** (najviac) jedna priamka $q : B \in q$ rovnobežná s priamkou p (ozn. $p \parallel q$).

Piaty Euklidov postulát.

A keď priamka pretínajúca priamky dve priamky tvorí na tej istej strane vnútornej (priľahlej) uhly menšie dvoch pravých, tie dve priamky predĺžené do nekonečna sa zbiehajú na tej strane, kde sú uhly menšie dvoch pravých.

Tvrdenie(Základy, T/XXXII).

Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je rovný dvom pravým uhlom.

Dôkaz.

Pokúste sa dokázať toto tvrdenie ako cvičenie. Tvrdenie T/XXXII je ekvivalentné axióme rovnobežnosti. Euklidov dôkaz nájdete v kapitole "Geometria trojuholníka".

Spojitosť

Tvrdenie T/1 (Euklidove Základy Kniha 1, Tvrdenie I).

K danej úsečke d zostrojte rovnostranný trojuholník tak, aby táto úsečka bola jednou z jeho strán.

Dôkaz.

Dôkaz má konštrukčný charakter. Euklides popisuje konštrukciu rovnostranného trojuholníka ABC pomocou kružníc $k_1 = (A, d)$, $k_2 = (B, d)$, ktoré sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch.

Poznámky.

1. V Euklidových Základoch sa nenachádza axióma alebo tvrdenie, podľa ktorého je zaručená existencia spoločného bodu dvoch kružníc!
2. V e-knihe DGS sme už uviedli, že v afinnom priestore nad poľom racionálnych čísel sa kruhy nepretínajú.
3. Euklides síce nehovorí o spoločnom bode dvoch kružníc, uvádza len tvrdenie/formuláciu "... v ktorom sa kruhy navzájom pretínajú, ..."
4. Vyriešiť tento problém je možné sformulovaním axióm spojitosťi.

Axiómy spojitosťi.

S1: (Archimedova axióma) Nech sú dané úsečky AB, CD . Na polpriamke \overrightarrow{AB} zostrojme postupne body P_1, P_2, \dots také, že

$$AP_1 \cong P_1P_2 \cong \dots \cong P_iP_{i+1} \dots \cong CD.$$

Potom existuje jediné prirodzené číslo n také, že bod $P_n \in AB$ a $P_{n+1} \notin AB$.

S2: (Axióma úplnosti) K bodom a priamkam v rovine už nie je možné pridať ďalšie tak, aby výsledná geometria stále spĺňala všetky doteraz uvedené axiómy

Poznámky.

1. Euklidovská rovina je model všetkých uvedených axióm.
2. Euklidovská rovina je afinná rovina \mathbb{R}^2 so skalárnym súčinom definovaným na jej vektorovej zložke. Používame aj označenie \mathbb{E}^2 .
3. Geometria, ktorá spĺňa všetky Hilbertove axiómy (dôležitá je pritom Archimedova axióma), môžeme v nej zaviesť meranie! Pozrite si e-knihu "[Miera úsečky](#)".

Neeuklidovská geometria

V historickom vývoji geometrie nájdeme dva východiskové míľniky, ktoré by sme mohli charakterizovať tromi otázkami:

„Ako to vytvoriť? “

„Prečo to platí?“

„Platí piaty Euklidov postulát?“

Pozrite si práce [GRE], [VAL].

1. Začiatok tejto cesty „Ako “ patrí približne do obdobia dvoch tisícročí pred naším letopočtom, do obdobia mezopotámskeho a egyptského staroveku.
2. Obdobie „Prečo“ zahŕňa obdobie od antického Grécka až po objavy neeuklidovských geometrií. S úctou k veľikánom gréckej matematiky a filozofie treba zdôrazniť, že mnohé grécke myšlienky predbehli svoju dobu o dve nasledujúce tisícročia.

Objav neeuklidovských geometrií v 19. storočí patrí k najvýznamnejším historickým etapám vo vývoji matematiky a mal hlboký vplyv na vedu a filozofiu. Slovanami M. Greenberga (pozrite si prácu [GRE]):

*„Väčšina ľudí nevie, že v 19. storočí došlo k **revolúcii v oblasti geometrie**, ktorá bola vedecky tak hlboká a vo svojom vplyve rovnako filozoficky dôležitá ako Darwinova evolučná teória.“*

Prenikáním informačno-komunikačných technológií (IKT) do života spoločnosti koncom 20. storočia nášho letopočtu sa začala revolúcia nielen v myslení ľudí ale aj v organizácii a riadení ich práce. Používanie IKT vo vzdelávacom procese sa stalo neodmysliteľnou súčasťou moderného vyučovania. V tejto práci chceme poukázať na nové možnosti riešenia konštrukčných úloh v hyperbolicknej neeuklidovskej geometrie využitím nových nástrojov v programe GeoGebra. Zameriame sa na model Poincare Disc, v ktorom budeme riešiť základné geometrické úlohy len použitím "neeuklidovského" pravítka a kružítka.

Definícia.

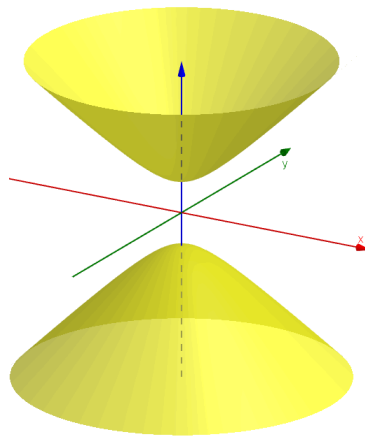
Neeuklidovská geometria je taká geometria, v ktorej **neplatí piaty Euklidov postulát** (axióma rovnobežnosti) ale spĺňa axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti.

Neeuklidovské geometrie rozdeľujeme do dvoch kategórií:

1. Hyperbolická geometria, v ktorej daným bodom neležiacim na danej priamke prechádzajú aspoň dve rovnobežky.
2. Parabolická geometria, v ktorej neexistuje žiadna rovnobežka idúca daným bodom neležiacim na danej priamke.

V našej práci sa budeme zaoberať len hyperbolickou rovinou geometriou.

Za východisko pre **hyperbolickú rovinu** si vezmeme **dvojdielny hyperboloid** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Dynamický hyperboloid si otvoríte [Tu](#).

Uskutočníme dve operácie:

1. Operácia "**stotožnenie**" každých dvoch bodov hyperboloidu súmerných podľa jeho stredu. Takouto operáciou redukuje daný hyperboloid len na jednu jeho časť. Takto definovanú dvojicu bodov nazývame **združené** body. V ďalších úvahách budeme pracovať len s jeho jednou časťou hyperboloidu, napríklad s "hornou časťou".
2. Operácia "**prienik**" bude predstavovať rez hyperboloidu stredovou rovinou, ktorá je určená dvomi rôznymi bodmi (dvomi združenými dvojicami bodov) a stredom hyperboloidu. Teoreticky stredová rovina môže byť trojakého typu: reálne pretína hyperboloid v hyperbole, môže sa dotýkať hyperboloidu alebo ho nepretína v reálnom prieniku.

Teraz môžeme definovať základné primitívne pojmy pre hyperbolickú geometriu.

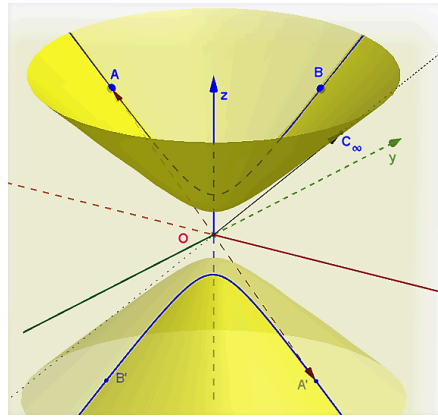
1. **Bod** hyperbolickej roviny je trojakého typu:

- vlastný bod hyperboloidu je dvojica A, A' združených bodov, ktorú nazývame ***h-bod***
- nevlastný (limitný) bod C_∞ hyperboloidu (stotožnené body na nevlastnej kružnici) nazývame ***nevlastný bod 1. druhu***
- nevlastné body priestoru Euklidovského priestoru, ktoré na ploche hyperboloidu neležia, nazývame ***nevlastný bod 2. druhu***

Napríklad bod A (spolu so združeným bodom A') hyperboloidu je vlastný ***h-bod hyperbolickej roviny***.

2. **Priamka** hyperbolickej roviny je krivka, ktorá vznikne ako **prienik** (rez) hyperboloidu s ľubovoľnou stredovou rovinou¹). Keďže rezy takých rovín môžu byť trojakého typu, existujú tri typy hyperbolických h-priamok.

- ak prienikom stredovej roviny s hyperboloidom je hyperbola, tak túto krivku (hyperbolu) nazývame ***h-priamka***
- ak prienik obsahuje len povrchovú priamku asymptotickej²) kužeľovej plochy (rovina sa dotýka hyperboloidu v nekonečne), tak tento prienik budeme považovať za ***nevlastnú h-priamku 1. druhu*** (rovina hyperboloid reálne pretne v komplexne združených rovnobežkách)
- nepretína hyperboloid, tak rezom je imaginárna kužeľosečka (elipsa), ktorú nazveme ***nevlastná h-priamka 2. druhu***.



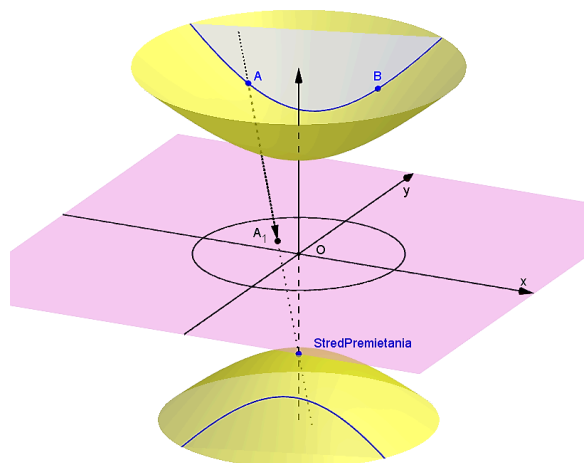
Otvorte si interaktívny applet [Tu](#).

Poznámky.

1. Stredová rovina (priamka) je rovina (priamka) prechádzajúca stredom O hyperboloidu.
2. Asymptotická kužeľová plocha je rotačná plocha, ktorá sa dotýka rotačného hyperboloidu v nevlastnej kužeľosečke.
3. Nevlastný (limitný) bod C_∞ hyperboloidu (stotožnené body na nevlastnej kružnici) nazývame **nevlastný h -bod 1. druhu**.
4. Nevlastné body priestoru Euklidovského priestoru, ktoré na ploche hyperboloidu neležia, nazývame **nevlastný h -bod 2. druhu**.
5. Keďže rezy stredových rovín s hyperboloidom môžu byť trojakého typu, existujú tri typy hyperbolických h -priamok:
 - ak prienik obsahuje len povrchovú priamku asymptotickej kužeľovej plochy (rovina sa dotýka hyperboloidu v nekonečne), tak tento prienik budeme považovať za **nevlastnú h -priamku 1. druhu** (rovina hyperboloid reálne pretne v komplexne združených rovnobežkách)
 - ak stredová rovina nepretína hyperboloid, tak rezom je imaginárna kužeľosečka (elipsa), ktorú nazveme **nevlastná h -priamka 2. druhu**.

Poincarè model

- model vznikne ako stredový priemet dvojdielného hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- stred premietania je vrchol $V' = (0, 0, -1)$ (spodná časť) hyperboloidu
- premietame do roviny kolmej na os hyperboloidu, ktorá prechádza stredom hyperboloidu $O = (0, 0, 0)$.



Dynamický obrázok si otvoríte [TU](#).

- priemetom hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ je zrejme otvorený kruh $\omega = (O, r < 1)$
- tento otvorený kruh so stredom O sa nazýva **Poincarè Disc**

Tvrdenie

1. Priemetom **h-bodu** (vlastného) hyperboloidu je zrejme vnútorný bod kruhu $\omega(O, r = 1)$.
2. Priemetom **h-priamky** (hyperboly) je otvorený kružnicový oblúk kruhu, ktorý je kolmý na jeho hranicu ω .

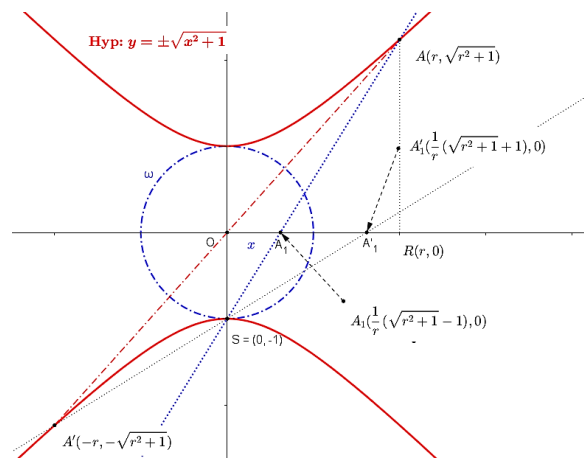
Dôkaz

1. Dôkaz prvej časti tohto tvrdenia vyplýva z vlastností stredového premietania, v ktorom sa kužeľová plocha obaľujúca hyperboloid zobrazí do kružnice $(O, r = 1)$. To znamená, že ľubovoľný bod hyperboloidu sa zobrazí do vnútra kruhu $\omega(O, r \leq 1)$.
2. Dôkaz druhej časti o priemete **h-priamky** (reálne stredovej hyperboly) rozdelíme na dve etapy i. a ii.

i. Nech A, A' je dvojica združených bodov hyperboloidu a nech A_1, A'_1 sú ich stredové priemety. Pre súčin vzdialeností a_1, a'_1 bodov A_1, A'_1 od stredu O hyperboloidu platí:

$$a_1 \times a'_1 = \left[\frac{1}{r}(\sqrt{r^2 + 1} - 1) \right] \times \left[\frac{1}{r}(\sqrt{r^2 + 1} + 1) \right] = 1.$$

Dôkaz toho, že súčin vzdialeností $|OA_1| \times |OA'_1|$ je konštantný je prezentovaný v nižšie priloženom applete.



Dynamický obrázok si otvoríte [TU](#).

- ii. Musíme ešte dokázať, že priemety h -bodov A h -priamky (hyperboly) v označení A_1 ležia na kružnici kolmej na kružnicu $\omega(O, r = 1)$. Dôkaz je v ďalšej kapitole tejto práce. Pri dôkaze budeme potrebovať tvrdenie o mocnosti bodu ku kružnici.

Mocnosť bodu ku kružnici

Je daná kružnica $k(S_k, r_k)$ a bod O , ležiaci zvonka kružnice. Nech p je sečnica kružnice k vedená bodom O a nech A_1, A'_1 sú priesečníky sečnice p s kružnicou $k(S_k, r_k)$. Pod mocnosťou bodu O ku kružnici $k(S_k, r_k)$ rozumieme číslo m , pre ktoré platí: $m = |OA_1| \cdot |OA'_1|$.

Viac o mocnosti bodu ku kružnici nájdete v kapitole Mocnosť bodu ku kružnici [TU](#). Vlastnosť mocnosť stačí vhodne aplikovať na náš prípad. Ilustráciu tvrdenia o priemete h -priamky prezentuje nasledujúci applete. Podrobný dôkaz (časti ii.) nájde čitateľ v ďalšej podkapitole s názvom "Hyperbolická priamka". Pozrite si tiež kapitolu "The Poincaré Disk Model" v práci [HIT].

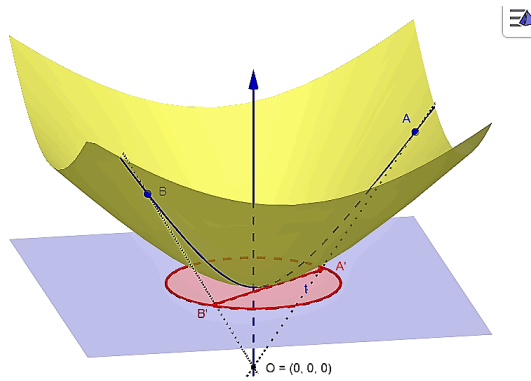
Beltramiho-Kleinov model

Model vznikne ako stredový priemet dvojdielného hyperboloidu do roviny kolmej na os hyperboloidu, pričom

- stred premietania je stred hyperboloidu - bod $O = (0, 0, 0)$
- rovina, do ktorej premietame je dotyková rovina hyperboloidu v jeho vrchole $V = (0, 0, 1)$
- **priemetom hyperboloidu** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ je **otvorený kruh** $k = (V, r = 1)$, ak $a = b = c = 1$
- kruh s vrcholom V a polomerom $r = 1$ sa nazýva **Klein Disc**
- **priemetom h -bodu** (vlastného) hyperboloidu je zrejme **vnútorný bod kruhu**.

Zhrnutie

1. Bodmi Beltrami Kleinovho modelu sú body Klein Disku.
2. **Priamkami sú tetivy** tohto disku.



V obidvoch hyperbolických modeloch (Beltrami a Poincarè) **neplatí axióma rovnobežnosti**.

1. V obidvoch prípadoch existuje viac ako jedna rovnobežka.
2. Existencia rovnobežky vyplýva z prvých skupín axióm.
3. V modeli "Sféra" nemáme zaručenú ani existenciu rovnobežky.
4. Kleinov disk a Poincarè disk sú modely, ktoré vzniknú aj premietaním do vhodnej roviny. Pozri [Disk a hyperboloid](#).
5. Výhodou modelu Klein je, že priamky v tomto modeli sú euklidovské (rovné) tetivy. Nevýhodou je, že model nie je konformný (kruhy a uhly sú skreslené).
6. Neeuklidovská hyperbolická geometria reprezentovaná Poincarè diskom je konformná.

Hyperbolická priamka

Pokračovanie dôkazu tvrdenia o priemete h -priamky, v ktorom využijeme tvrdenie o mocnosti bodu ku kružnici.

Tvrdenie

Priemetom h -priamky (hyperboly) do Poincarè disku je **otvorený kružnicový oblúk**, ktorý je kolmý na hranicu kruhu $\omega(O, r \leq 1)$.

Pri dôkaze budeme potrebovať aj pojem dvojice inverzných bodov a pojem polárneho prvku v kruhovej inverzii. Viac o kruhovej inverzii nájdete v kapitole [Kruhová inverzia](#). Najskôr dokážeme lemu:

Lema

Nech je daná kruhová inverzia určená kružnicou - hranicou kruhu $\omega(O, r \leq 1)$ a nech bod A' je obrazom bodu A v tejto kruhovej inverzii. Zvoľme si ľubovoľnú ale pevne zvolenú kružnicu k prechádzajúcu dvojicou inverzných bodov A, A' . Ak kružnica k pozostáva výlučne len z dvojíc inverzných bodov vzhľadom na kružnicu - hranicu kruhu $\omega(O, r \leq 1)$, tak kružnica k pretína kružnicu - hranicu kruhu $\omega(O, r \leq 1)$ kolmo.

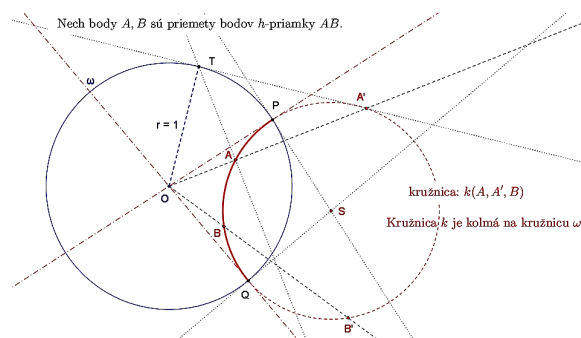
Dôkaz

- Nech body A, B sú priemety bodov h -priamky AB . Pozrite si priložený obrázok.
- Podľa predchádzajúcej časti dôkazu (i.) platí

$$|OA| \times |OA'| = |OB| \times |OB'| = 1.$$
- Odkiaľ: bod A' je obrazom bodu A aj v kruhovej inverzii ($O, r = 1$). Podobne to môžeme povedať aj o bodoch B, B' .
- Nech k je kružnica určená bodmi A, A', B , potom v dôsledku mocnosti bodu O ku kružnici k bude aj bod B' bodom kružnice k .
- Teraz uvažujme o dotykových bodoch P, Q na dotyčniciach z bodu O ku kružnici k .
- Mocnosť bodov A, B, P, Q ku kružnici k

$$|OB| \times |OB'| = |OP|^2 = |OQ|^2 = 1$$
- Z toho vyplýva, že body P, Q sú samodružné v kruhovej inverzii ($O, r = 1$).
- Priamky $\overleftrightarrow{OP}, \overleftrightarrow{OQ}$ sú dotyčnice ku kružnici k . Odkiaľ $\overleftrightarrow{SP} \perp \overleftrightarrow{OP}, \overleftrightarrow{SQ} \perp \overleftrightarrow{OQ}$.
- Kružnica k je kolmá na kružnicu ω .

Tým je dôkaz lemy ukončený.



Otvorte si applet v programe GeoGebra - dôkaz [TU](#). Pozrite si tiež prácu [HYP].

V dôsledku lemy a predchádzajúcich častí dôkazu môžeme vysloviť tvrdenie.

Priemetom h -priamky AB je otvorený oblúk \widehat{PAQ} na kružnici k .

Poincarè diskový model (tiež sa používa označenie **Poincarè Disc**) hyperbolickej roviny je prezentovaný v euklidovskej rovine ako **otvorený kruh** $\omega = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1; x, y \in \mathcal{R} \}$. Euklidovskú geometriu roviny môžeme považovať za „ontológiu pozadia“.

V predchádzajúcej časti sme uviedli, že tento otvorený kruh je stredovým priemetom dvojdielného hyperboloidu. Uviedli sme tvrdenie, že v Poincarè diskovom modeli pre hyperbolicke body a hyperbolicke priamky platí:

- **vlastný bod** je vnútorný bod kruhu, ktorý je priemetom vlastného *h-bodu* hyperboloidu;
- **koncový bod** (resp. nevlastný bod) ležiaci na hranici kruhu, ktorý je priemetom nevlastného bodu 1. druhu;
- **priamka je otvorený kružnicový oblúk** kruhu - je priemetom *h-priamky* (hyperboly), pričom tento oblúk leží na kružnici kolmej na hranicu kruhu

Zostrojíte bod v Poincarè modeli znamená zostrojíte bod vo vnútri kruhu ω , čo nie je žiadny problém.

Pri zostrojovaní hyperbolickej priamky určenej dvoma bodmi kruhu s výhodou využijeme vlastnosti kruhovej inverzie a konštrukcie

popísané v predchádzajúcom dôkaze.

Poznámky

1. V ďalšej podkapitole navrhne v prostredí GeoGebra konštrukciu a zároveň aj nástroj na zostrojenie hyperbolickej priamky určenej dvoma rôznymi bodmi v Poincarè modeli disku. V konštrukcii využijeme inverzné body.
2. Pri riešení konštrukčných úloh v Poincarè modeli potrebujeme okrem konštrukcie hyperbolickej priamky potrebovať aj konštrukciu kružnice a ďalších základných euklidovských konštrukcií (kolmica, os úsečky a pod).

Nástroj hPriamka

Poznámky.

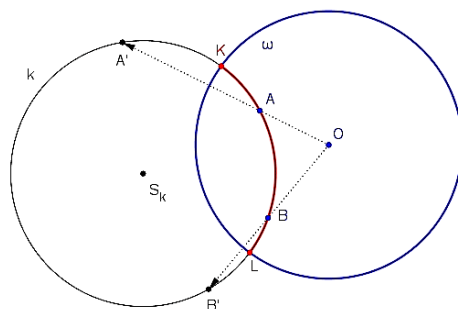
1. Konštrukcie v Poincaré Disku si uľahčíme, ak v GeoGebre vytvoríme vlastné nástroje, ktorými sa "vykreslí" resp. zostrojí požadovaný útvar.
2. Vychádzame z tvrdenia, že h -priamka sa zobrazí do kružnicového oblúku, ktorý leží na kružnici kolmej k Poincaré disku.
3. Najskôr musíme popísať konštrukciu, ktorá vytvorí požadovaný kolmý oblúk (obraz h -priamky).
4. Potom pomocou makier vytvoríme nástroj, pomocou ktorého sa zostrojí požadovaný kolmý oblúk.

Príklad (Vytvorenie nástroja).

Daný je kruh $\omega(O, r = 1)$ a body A, B ležiace vnútri kruhu, pričom úsečka AB nie je priemerom. Zostrojte obraz hyperbolickej h -priamky určenej bodmi A, B v prostredí GeoGebra.

Riešenie - zostrojenie kružnicového oblúka v Euklidovskej rovine

Predpokladajme, že aspoň jeden z bodov A, B je vnútorný bod kruhu ω a je rôzny od stredu O . Podľa už dokázaného tvrdenia je hľadaná h -priamka kružnicový oblúk, ktorý je určený bodmi A, B a zároveň leží na kružnici kolmej ku kruhu $\omega(O, r = 1)$. Pozrite si nasledujúci obrázok.



Postup euklidovskej konštrukcie.

1. V kruhovej inverzii $\omega(O, r = 1)$ zostrojíme obrazy A', B' bodov A, B .
2. Zostrojíme kružnicu k určenú bodmi A, A', B' alebo bodmi A, B, B' . Nájďme priesečníky K, L .
3. Na kružnici $k(S_k, r)$ vyznačíme menší z oblúkov, ktoré sú určené krajnými bodmi K, L .
4. Menší oblúk je hľadaný obraz hyperbolickej priamky AB . Túto konštrukciu si otvoríte [Tu](#).

Konštrukciu kružnicového oblúka, ktorá zohľadňuje aj prípady

- a. úsečka AB je priemerom kružnice $\omega(O, r = 1)$ - v konštrukcii tento prípad má názov "Diameter"
- b. obidva body A, B ležia na kružnici $\omega(O, r = 1)$ ale nie sú priemerom - v konštrukcii tento prípad má názov "Nevlastne",

nájďete v nami vytvorenom applete [Tu](#).

Túto konštrukciu si uložte do vášho PC napríklad pod názvom "h-Priamka". Táto konštrukcia bude východiskom pre vytvorenie **Nástroja "hPriamka"** v GeoGebre, pomocou ktorého sa narysuje obraz h -priamky v Poincaré modeli.

Postup na vytvorenie nástroja "hPriamka" v GeoGebre, pomocou ktorého sa narysuje obraz hyperbolickej priamky v Poincaré modeli.

1. Spustíte program GeoGebra a otvoríte si súbor uložený s názvom "h-Priamka".
2. V základnom Menu programu GeoGebra vyberte možnosť "Vytvoríť nový nástroj".
3. Postupujte podľa pokynov pre vytvorenie nástroja:
 - ako výstupné objekty vyberte oblúk "hPriamka" (otvoríte si aj algebraické okno)

- ako vstupné objekty vyberte body: A, B
 - vhodne pomenujte nástroj, napr. "**hPriamka**", vyberte predtým vytvorený obrázok pre ikonku
 - v nápovedi uveďte napr. "Ukáž dva body a potom klikni na kružnicu"
 - zaškrtnite políčko "Ukázať na palete nástrojov" (nie je nutné).
4. Ak už vidíte novú ikonku nástroja hPriamka, tak v tejto konštrukcii kliknite v stĺpci Súbor na Nový.
5. Nákresňa je "čistá" ale ikonka hPriamka je tam (ak nie, tak Prispôsobte paletu nástrojov) . Teraz si vytvorte kružnicu ($O, r = 1$) a vhodne zväčšite plochu nárysne. Uložte si tento súbor napr. s názvom Nástroj hPriamka.

Nami novovytvorený nástroj **hPriamka** v GeoGebre na zostrojenie obrazu h -priamky v modeli Poincaré Disc ω s polomerom $r = 1$ si môžete otvoriť [Tu](#) (je umiestnený vpravo na lište nástrojov).

Používanie nástroja hPriamka je analogické ako v euklidovskej rovine. Najskôr si zvolíte dva rôzne body vo vnútri kruhu ω - pomocou nástroja *Bod*. Potom aktivujete nástroj **hPriamka** a program vykreslí kružnicový oblúk, ktorý je priemetom h -priamky (hyperboly).

Cvičenie.

Vytvorte **Nástroj**/ikonku v GeoGebre, pomocou ktorého sa vykreslí obraz hyperbolickej úsečky (časti hyperboly) v modeli Poincaré Disku.

Využite kompletnú konštrukciu hPriamky.

Pokračujte v tejto konštrukcii krokmi:

1. zostrojte stred oblúka "hPriamka", ktorý označte napr. S_h
2. potom zostrojte oblúk s názvom "hUsecka" určený stredom S_h a krajnými bodmi A, B a
3. následne vytvorte GeoGebra nástroj s rovnakým názvom "hUsecka".

Porovnajete vaše riešenie s riešením [Tu](#).

Nástroj hKružnica

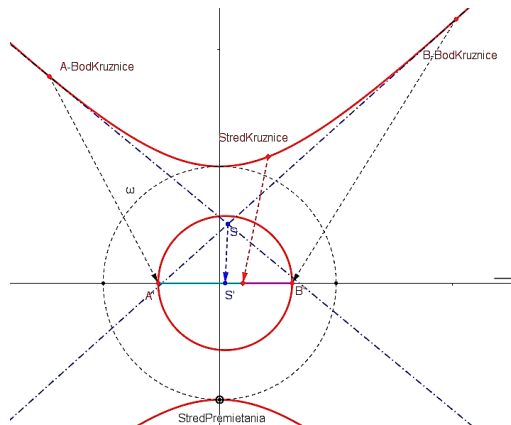
Nech sú dané dva rôzne body S a A na hyperboloide.

1. Uvažujme o kružnici $k = (S; r = |SA|)$, ktorej všetky body sú bodmi hyperboloidu. Symbolicky: $\forall X \in k \Rightarrow X \in HYP$.
2. Nech bod B je stredovo súmerný k bodu A podľa stred S , potom bod B je tiež bodom kružnice k a zároveň bodom hyperboloidu.
3. Nech ρ je určená bodmi A, S a bodom StredPremietania. Táto rovina pretína daný dvojdielny hyperboloid v hyperbole (v applete červená krivka).
4. Zostrojme dotyčnice k tejto hyperbole v bodoch A, B a ich priesečník S_1 .
5. Potom platí nasledujúce tvrdenie, ktoré uvádzame bez dôkazu. K dôkazu sú potrebné širšie znalosti stredového premietania kužeľosečiek.

Tvrdenie

Priemetom kružnice $k = (S; r = |SA|)$ do stredovej roviny (Poincaré disku

$\omega = \{x^2 + y^2 < 1; x, y \in \mathbb{R}\}$) je kružnica $k' = (S'_1; r = |S'_1 A'|)$,



Otvorte si interaktívnu konštrukciu [Tu](#) a pohybujte bodom "StredKruznice".

Poznámka.

Na základe tohto tvrdenia môžeme uskutočniť konštrukciu, pomocou ktorej zostrojíme kružnicu v Poincaré disku určenú stredom S a bodom A a na základe tejto konštrukcie aj nástroj v GeoGebre pomocou, ktorého narýsuje kružnicu v modeli Poincaré Disc.

Nákresňa

Zostrojte hyperbolickú kružnicu k určenú stredom S_k a bodom $A : k(A, r \cong S_k A)$.

Geometrické okno 2

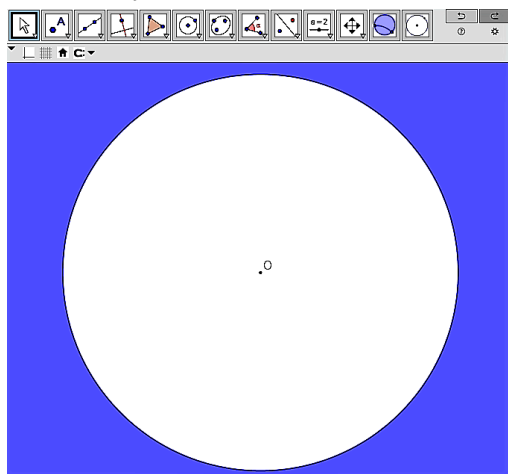
Poincaré Disc: $\omega = \{x^2 + y^2 < 1; x, y \in \mathbb{R}\}$

1. Oblúk $\alpha = S_k A$; S_1 jeho stred a S'_k obraz v kruhovej inverzii ω
2. Oblúk $\delta \perp \alpha$; $(\overline{S'_k S_1} \perp \overline{O A}) \wedge (S_2 = \overline{S'_k S_1} \cap \overline{P Q})$
3. B – obraz bodu A v kruhovej inverzii δ
4. Dotyčnice t_B, t'_B k oblúku α cez B, B'
5. Stred euklidovskej kružnice je $S = t_B \cap t'_B$
6. $\varphi = (S, r = SB \dots \cong AB)$

Otvorte si applet [TU](#).

Poznámka.

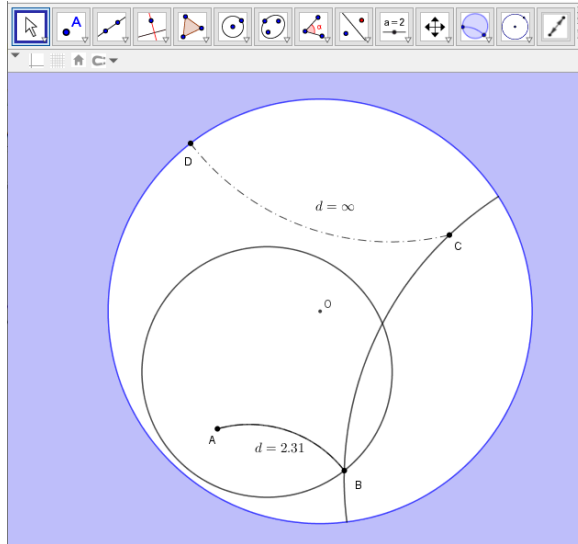
Teraz už máme tri základné (euklidovské) nástroje: hPriamku hUsecku a hKružnicu v Geogebre.



Otvorte si applet [TU](#).

Poincare disk

Základné "hyperbolické" konštrukcie v Poincarè Disku $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1; 0; x, y \in \mathbb{R}\}$, ktoré sú zovšeobecnením euklidovských konštrukcií, sú prezentované formou riešených úloh. Pri riešení úloh z neeuklidovskej geometrie je vhodné, aby ste si najskôr stiahli applet "Poincarè Disk" vytvorený v prostredí GeoGebra. Pomocou tohto appletu vieme zostrojiť hyperbolickú úsečku a priamku; kružnicu určenú stredom a bodom resp. polomerom; vieme určiť vzdialenosť dvoch bodov.



Poincaré Disk si môžete stiahnuť [Tu](#)

Riešené úlohy z neeuklidovskej geometrie.

1. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC pomocou hyperbolických kružníc $k_1 = (A, AB), k_2 = (B, AB)$ (pozrite si Euklidovo tvrdenie T/I).

Riešenie [Tu](#).

2. Zostrojte hyperbolickú priamku $\mu \subset \omega$, ktorá je osou úsečky $\alpha = AB$, kde $A, B \in \omega$.

Návod:

- a. Využitím Euklidovho tvrdenia T/I zostrojte hyperbolické rovnostranné trojuholníky ABC, ABC' , kde C' je súmerný bod podľa priamky AB .
- b. V trojuholníku ABC zostrojte os prechádzajúcu vrcholmi C, C' .
- c. Využite Euklidove tvrdenia T/IX a T/X.

d. Riešenie [Tu](#).

3. Zostrojte hyperbolickú kolmicu $\sigma \subset \omega$ na hyperbolickú priamku $\alpha = AB$, ktorá prechádza bodom $P \in \alpha$. Pomocou dotýčnic k hPriamkam AP, PC ukážte, že uhly pri päte kolmice sú pravé.

Návod: Využite Euklidove tvrdenia T/XI a T/XII.

4. Zostrojte hyperbolickú rovnobežku k hyperbolickej priamke $a = AB$, ktorá prechádza bodom $P \notin a$. Využite vlastnosť striedavých uhlov.

Poznámka.

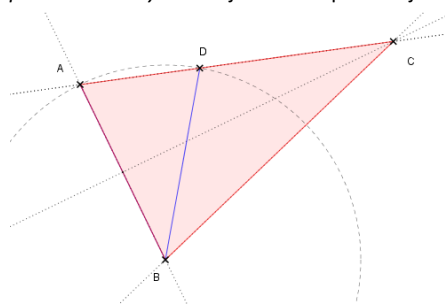
Euklidove tvrdenia využívané v tejto časti platia aj v hyperbolickej geometrii, keďže sú nezávislé na piatom Euklidovom postuláte.

Cvičenie I

Cvičenie.

- Dokážte, že
 - Existuje práve jedna os uhla. Kniha I, Tvrdenie IX.
 - Každá nenulová úsečka má práve jeden stred, a ten je jej vnútorným bodom. Kniha I, Tvrdenie X. Pozrite si euklidovskú konštrukciu osi úsečky Tu.
 - Riešte úlohy (napr. č. 3, 11 a 12) zo zbierky " Základné euklidovské konštrukcie" Tu. Pokúste sa o riešenie aj ďalších úloh.
- Nech v rovnoramennom trojuholníku ABC platí, že uhol pri základni trojuholníka je dvojnásobkom uhla pri vrchole C . Overte, že dĺžka ramena a dĺžka základne sú v **zlatom pomere**. Pozrite Euklidove Základy Kniha II, Tvrdenie XI a otvorte applet Tu.

Pomoc pri riešení úlohy: Do trojuholníka vpište trojuholník ADB s ním podobný



otvorte applet Tu

a aplikujte Euklidovo tvrdenie Kniha 1., T/IV a T/V. Viac o zlatom pomere nájdete v prezentácii Tu.

- Ukážte, že uhlopriečky obdĺžnika sú zhodné a že sa navzájom rozpolujú. (Vytvorte applet, ktorý bude interpretovať túto vlastnosť.)
- Pomocou tvrdenia "Uhlopriečky obdĺžnika sú ..." ukážte:

Ak je ABC pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C , potom všetky jeho vrcholy ležia na kružnici, ktorej priemerom je strana AB .
- Ukážte, že platí:

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}.$$

Uvedomte si, že pre polohu bodu X vzhľadom na A, B máme možnosti: $\mu(XAB), X = A, \mu(AXB), X = B, \mu(ABX)$.

6. Uvedte definíciu opačnej polroviny. (Pozrite si prácu: Monoszová, G.: Planimetria.)

7. Dané sú tri nekolineárne body A, B, C . Určte množinu (šrafovaním)

- $\{X; XC \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset\}$
- $\{X; XC \cap \overleftarrow{AB} \neq \emptyset\}$
- $\{X; \overleftrightarrow{XC} \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset\}$
- $\{X; \overleftrightarrow{XC} \cap \overleftarrow{AB} = \emptyset\}$

Použite applet, v ktorom je nástroj na vyznačenie polroviny.

Základné **hyperbolické konštrukcie** v Poincare Disku $\omega = \{x^2 + y^2 < 0; x, y \in \mathbb{R}\}$.

- Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB pomocou dvoch zhodných hyperbolických kružníc (kružnice s rovnakým polomerom). Pomocou dotyčníc k priamkam AB, AC a k priamkam AB, BC určte veľkosti uhlov pri základni a presvedčte sa, že majú rovnakú veľkosť. Riešenie Tu.
- Nájdite stred kružnice (pozrite si Euklidovo tvrdenie: Kniha III, T/I). Riešenie Tu.
- Zostrojte hyperbolickú kolmicu $\sigma \subset \omega$ na hyperbolickú priamku $\alpha = AB$, ktorá neprechádza bodom $P \notin \alpha$.
Návod: Využite Euklidove tvrdenia T/XI a T/XII.

11. Zostrojte kružnicu vpísanú (resp. opísanú) do trojuholníka ABC (pozrite si Euklidovo tvrdenie: Kniha IV, T/IV (resp. T/V)).

Poznámky.

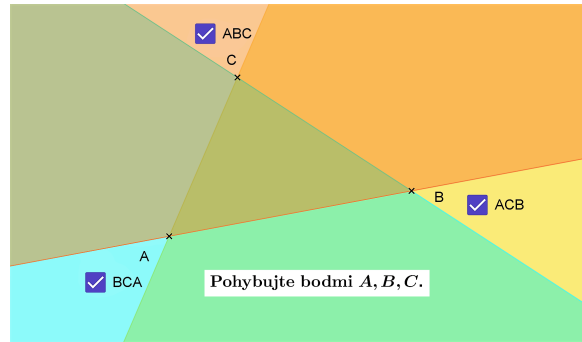
1. Pri dokazovaní prípadov 1a, 1b najskôr ukážte existenciu daného útvaru a potom jeho jednoznačnosť.
2. Cvičenie 2. Ukážte, že základňa trojuholníka ABC je stranou pravidelného päťuholníka vpísaného do kružnice k a rameno trojuholníka je jeho uhlopriečkou.
3. Kolmé kružnice. Základ [Tu](#). Kompletná konštrukcia [Tu](#). GeoGebra s nástrojom "Kolmá kružnica" je [Tu](#).

Geometria trojuholníka

Definícia (trojuholník v Hilbertovom axiomatickom systéme).

Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod **trojuholníkom** ABC rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$.

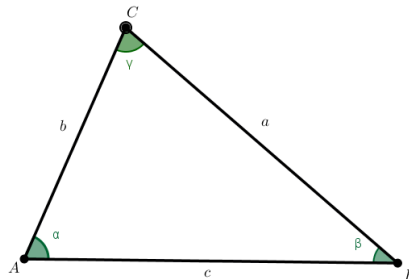
$$\triangle ABC := \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$$



Otvorte si applet [T.U.](#)

Základné pojmy.

1. Body A, B, C sú jeho **vrcholy**.
2. Jednotlivé úsečky AB, BC, AC sú **strany** $\triangle ABC$.
3. Vrcholy a strany tvoria spolu **hranicu** trojuholníka $\triangle ABC$.
4. Body, ktoré sú zároveň vnútornými bodmi polrovín $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$ sú **vnútorné body** alebo vnútro $\triangle ABC$.
5. Body, ktoré neležia ani na hranici ani vnútri $\triangle ABC$, sú **vonkajšie body** alebo **vonkajšok** $\triangle ABC$.



Applet [T.U.](#)

Poznámky.

1. Množinové poňatie pojmu trojuholník je vhodné pre SŠ

Trojuholník ABC je množina všetkých bodov, ktoré súčasne ležia v polrovínach $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$, pričom body A, B, C sú nekolineárne.

2. Pojem trojuholníka vhodný pre 2. stupeň ZŠ

Nech A, B, C sú tri nekolineárne body. Trojuholník ABC je časť roviny ohraničená úsečkami ABC .

Za základné vety (vlastnosti) trojuholníka považujeme nasledujúce dve vety:

1. Veta o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku.
2. Trojuholníkovú nerovnosť.

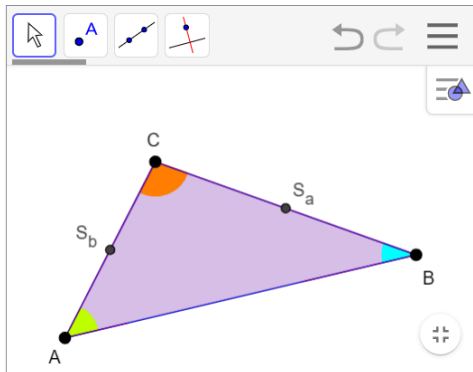
Veta (Súčet vnútorných uhlov).

Súčet všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku je priamy uhol (veľkosť je rovná 180°).

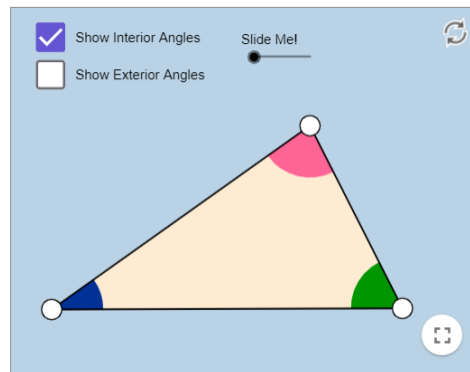
Euklides pri dôkaze tejto vety sa opiera o tvrdenia (pozrite si podkapitolu [Vety o trojuholníku](#))

- T/XXIX - "Priamka pretínajúca rovnobežky vytvára striedavé zhodné uhly a vonkajší uhol sa rovná opačnému vnútornému uhlu a súčet vnútorných uhlov na tej istej strane sa rovná dvom pravým uhlom."
- T/XXXI - "Daným bodom je možné zostrojiť priamku rovnobežnú s danou priamkou"

Interpretácia - existuje mnoho appletov, ktoré interpretujú vetu o súčte vnútorných uhlov. Aktivujte si dva, v ktorých:

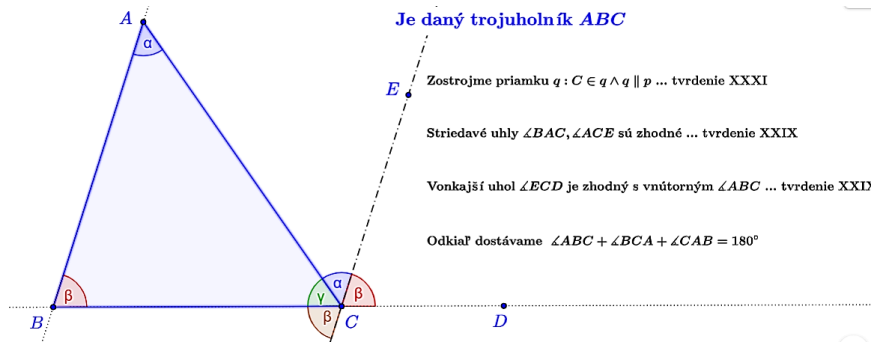


Presuňte vrcholy tak, aby sa prekrývali. Applet [Tu](#)



V nasledujúcom applete aktivujte posuvník. Applet [Tu](#)

Euklidov dôkaz - applet [Tu](#).



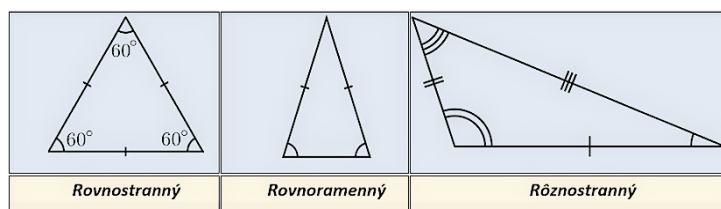
Kategorizácia trojuholníkov

Trojuholníky môžeme rozčleniť podľa viacerých kritérií, napríklad podľa:

- I. dĺžky jeho strán
- II. veľkosti najväčšieho vnútorného uhla.

Vzhľadom na dĺžky (veľkosti) strán v danom trojuholníku rozdeľujeme trojuholníky do troch skupín

1. **Rovnostranný** trojuholník - všetky strany trojuholníka majú rovnakú dĺžku (sú navzájom zhodné).
2. **Rovnoramenný** trojuholník - práve (len) dve strany rovnakej dĺžky (sú navzájom zhodné).
3. **Rôznostranný** trojuholník - všetky strany majú rozličnú dĺžku (žiadne dve strany trojuholníka nie sú zhodné).



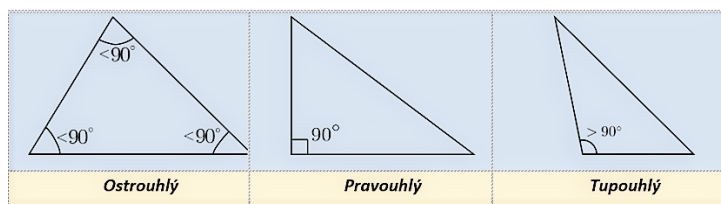
Poznámka

Zdôvodnenie, že neexistuje viac druhov trojuholníkov vyplýva z dichotomického hľadiska. Pre tri veľkosti strán (resp. pre tri čísla: a, b, c môžu nastať len prípady:

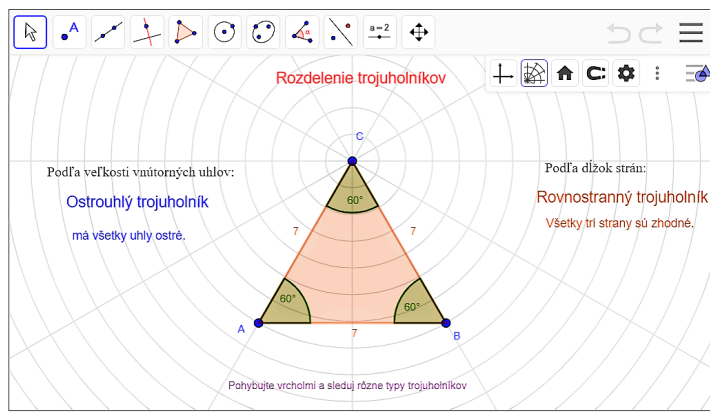
1. $a = b = c$, 2. $a = b \neq c$, 3. $a \neq b, a \neq c, b \neq c$

Vzhľadom na veľkosti veľkosti najväčšieho vnútorného uhla rozdeľujeme trojuholníky do troch skupín

1. **Ostrouhlý** trojuholník – má všetky vnútorné uhly menšie ako 90° (tri ostré uhly).
2. **Pravouhlý** trojuholník – má práve jeden vnútorný uhol s veľkosťou 90° (jeden pravý uhol).
3. **Tupouhlý** trojuholník – má práve jeden vnútorný uhol väčší ako 90° (tupý uhol) a ostatné uhly má ostré.



V priloženom applete "Rozdelenie trojuholníkov" môžete generovať rôzne typy trojuholníkov tak, že budete pohybovať vrcholmi trojuholníka. Vytvorte rôzne typy trojuholníkov, ktoré sú charakterizované veľkosťou strán a veľkosťou uhlov. Nájdite napríklad takú polohu vrcholov trojuholníka, aby bol pravouhlý a súčasne rovnoramenný (ak taký existuje). Pokúste sa zodpovedať otázku: **Kolko rôznych typov trojuholníkov reálne vznikne?**



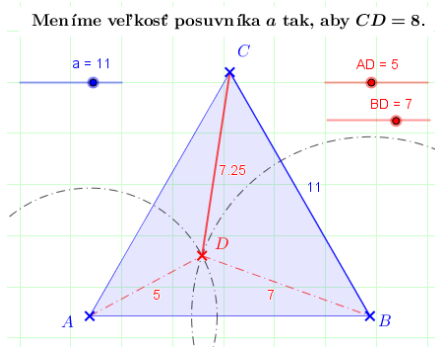
Applet otvoríte [TU](#).

Úloha.

Nájdite dĺžku strany rovnostranného trojuholníka, ktorého vrcholy majú od nejakého vnútorného bodu vzdialenosti 5, 7, 8. Práca [LAR] (Larson, Príklad 8.1.16, [TU](#))

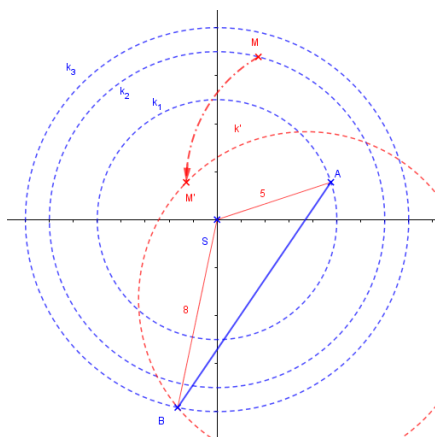
Riešenie.

1. Geometrické modelovanie/riešenie pomocou GeoGebry vhodné aj pre základné školy.



Applet otvoríte [TU](#).

2. Konštrukčné riešenie



Applet otvoríte [TU](#).

3. Algebraické riešenie pomocou kosínusovej vety vhodné pre stredné školy

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{x-74}{70} \right)$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{112} (x - 113) \right)$$

$$x - 64 - 25 = -2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos^{-1} \left(2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{x-74}{70} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{x-113}{112} \right) \right) \text{ Applet } \underline{\text{TU}}$$

Vybrané vety o trojuholníkoch

Definícia (Deliaci pomer).

Nech A, B, C sú tri kolineárne body také, že $A \neq B, C \neq B$. **Deliaci pomer** bodu C vzhľadom k bodom A, B rozumieme reálne číslo λ (označenie (ABC)), pre ktoré platí

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Pre bod $C \notin AB$ je $(ABC) > 0$ a pre bod $C \in AB$ je $(ABC) < 0$. Pre $C = A$ je zrejme $(ABC) = 0$.

Poznámky.

1. V niektorej literatúre sa pod deliacim pomerom troch rôznych kolineárnych bodov rozumie reálne číslo λ , pre ktoré platí:

$$C = A + \lambda \cdot \vec{AB}.$$

Takúto definíciu používa aj GeoGebra.

2. Deliaci pomer stredy úsečky je rovný -1. Dokážte to.
3. Pre tri rôzne kolineárne body platí:

$$(BAC) = \frac{1}{(ABC)}; \quad (ACB) = 1 - (ABC); \quad (CAB) = \frac{1}{1 - (ABC)}.$$

Dokážte to.

4. V rovine sú dané dva pevne body A, B . Množina všetkých bodov X tejto roviny, pre ktoré platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálna konštanta, je kružnica. Dokážte to a vytvorte konštrukciu v GeoGebre.

Ceova veta.

V trojuholníku ABC sa priamky AK, BK, CK , kde K je vnútorným bodom trojuholníka ABC a D, E, F sú body ležiace na stranách odpovedajúcim protifaľným vrcholom trojuholníka, pretínajú v jednom bode práve vtedy, ak platí:

$$S = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Giovanni Ceva bol taliansky matematik žijúci na prelome 17. a 18. storočia. Ceva veta stanovuje podmienku, kedy majú tri priamky prechádzajúce vrcholmi trojuholníka spoločný bod. Uvedieme jej prvú časť dôkazu, ktorý má konštrukčný charakter.

Dôkaz.

1. (\Rightarrow): Ak sa priamky pretínajú v jednom bode, tak $S = 1$.

Ak bod K je vnútorný bod trojuholníka ABC , tak platí: $S = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

Z podobnosti trojuholníkov dostávame:

$T_1 \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AH}{BC}$ $T_2 \quad \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AG}$

$T_3 \quad \frac{BD}{AG} = \frac{DK}{AK} \Rightarrow BD = AG \times \frac{DK}{AK}$

$T_4 \quad \frac{DC}{AH} = \frac{DK}{AK} \Rightarrow DC = AH \times \frac{DK}{AK}$

Odkiaľ dostávame $\frac{BD}{DC} = \frac{AG}{AH}$

Po dosadení do vzťahu S dostávame tvrdenie.

Applet Tu.

2. (\Leftarrow): Ak $S = 1$, tak sa priamky pretínajú v jednom bode.

Pri dôkaze tejto implikácie sa vychádza z priesečníka dvoch priamok. Potom sa zostrojí priamka prechádzajúca týmto

priesečníkom a tretím vrcholom. Následne sa dokáže, že táto priamka pretína protiľahlú stranu v bode, ktorý spĺňa podmienky vo vete. V dôkaze sa používajú tie isté podobnosti trojuholníkov ako v prvej časti dôkazu. Podrobnejší dôkaz nájdete v práci [Val, 2005].

Poznámky.

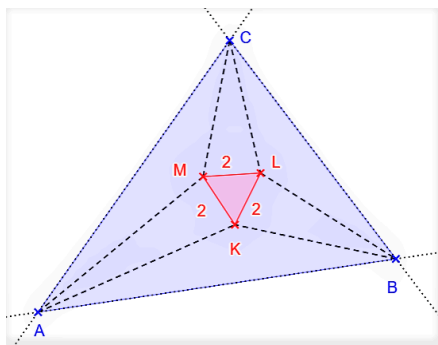
Aplikovaním Cébovej vety dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku sa:

1. Ťažnice sa pretínajú v jednom bode - ťažisku. (Využite skutočnosť, že ťažnice prechádzajú stredmi strán a každý z pomerov v Cébovej vete má tvar $\frac{m}{m} = 1$.)
2. Výšky pretínajú v jednom bode - ortocentre. (Využite skutočnosť, že napr. $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta}$, ak CF je výška.)
3. Osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode - stred vpísanej kružnice. (Využite skutočnosť, že os vnútorného uhla rozdeľuje protiľahlú stranu na dve časti, ktorých dĺžky sú v rovnakom pomere ako im príľahlé strany trojuholníka.)
4. Neskôr tieto tvrdenia dokážeme euklidovskou metódou.

Morleyho veta.

Ak v trojuholníku ABC zostrojíme polpriamky, rozdeľujúce jeho vnútorné uhly na tretinovú veľkosť, odpovedajúce si polpriamky sa pretínajú vo vrchoch rovnostranného trojuholníka KLM .

Morleyho veta predstavuje jednu z najprekvapujúcejších vlastností elementárnej geometrie, ktorú v roku 1899 objavil a dokázal anglo-americký matematik Frank Morley (1860-1937). Niektorí matematici nazývajú túto vetu aj ako *Morleyov zázrak*.



Dynamickú konštrukciu otvoríte [Tu](#). Jej autorom je [Ignacio Larrosa Cañestro](#).

Poznámky.

1. V 2. kroku dôkazu zhodnosť vyplýva z vety USU (uhly pri vrchole U ... os uhla, pri vrchole Z majú veľkosť 30° , strana UZ spoločná).
2. V 5. kroku dôkazu je potrebné ukázať, že trojuholník UXY je rovnoramenný (uhly pri základni sú zhodné):
 - zo zhodnosti trojuholníkov UXZ, UYZ vyplýva, že uhly pri vrchoch X, Y sú zhodné,
 - preto sú zhodné aj uhly $\angle XYU, \angle YXU : \angle UXY = \angle UXZ - 60^\circ$,
 - zároveň vieme, že platí $\angle XUY = \angle BUA = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$.
 - trojuholníky UXY, UYX sú zhodné a teda aj rovnoramenné.
 - Odkiaľ pre ich veľkosti dostávame $\angle UXY = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$ sú zhodné a teda aj rovnoramenné.
3. Morleyova veta sa dá dokázať trigonometricky pomocou sínusovej a kosínusovej vety a vzorcov pre sčítanie uhlov.
 - Ukážte, že strana Morleyovho trojuholníka je $d = 8 \cdot R \cdot \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$, kde R je polomer kružnice opísanej $\triangle ABC$.

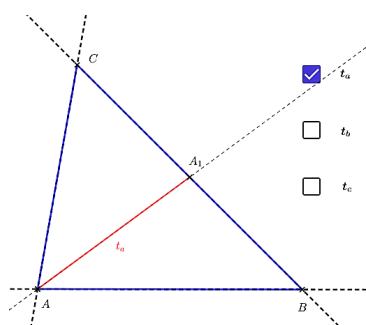
Ťažisko trojuholníka

Definícia (Ťažnica trojuholníka).

Nech je daný trojuholník ABC a nech A_1 je stred strany BC . Úsečka AA_1 sa nazýva **ťažnica** trojuholníka ABC .

V ďalších podkapitolách tejto sekcie dokážeme vlastnosti o ťažniciach trojuholníka.

1. Ťažnice sa pretínajú v jednom bode T . Tento bod sa nazýva **ťažisko** trojuholníka.
2. Každá ťažnica je ťažiskom rozdelená na dve časti v pomere $2 : 1$.



Applet [Tu](#).

Poznámky.

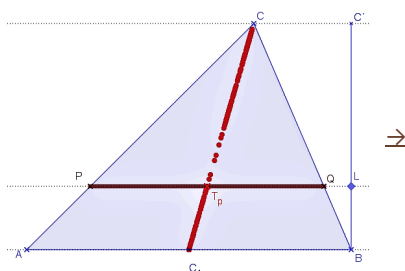
1. Ťažnice trojuholníka ABC budeme označovať t_a, t_b, t_c .
2. Krajný bod ťažnice $t_a = AA_1$ označujeme A_1 resp. používa sa označenie: S_{BC} - stred strany BC alebo S_a - stred strany a .
3. Vlastnosť, že ťažisko rozdeľuje každú ťažnicu v pomere $2 : 1$ sa na ZŠ robí meraním, na stredných školách sa už dokazuje táto vlastnosť.
4. V príprave budúcich učiteľov matematiky sa prezentuje viacero dôkazov. Napríklad ako dôsledok Cevovej vety alebo pomocou osovej afinity transformujeme trojuholník na rovnostranný. Tiež sa využíva aj vhodná rovnôľahlosť $H = (T, \kappa = -1/2)$.

Pri hľadaní ťažiska trojuholníka sa sústredíme na skúmanie vlastností priechok rovnobežných s danou stranou trojuholníka.

Experiment.

Vytvoríme v GeoGebre model trojuholníka ABC rozdeleného na veľmi tenké pásiky, ktoré budú rovnobežné so stranou AB .

1. Zrejme ťažisko T_p každého tenkého pásika bude ležať v jeho "strede"
2. Pásiky budeme postupne zužovať, až dostaneme rovnobežné úsečky PQ so stranou AB
3. Pri posúvaní rovnobežnej úsečky PQ pomocou bodu L sa bude zaznamenávať stopa jej stredy T_p



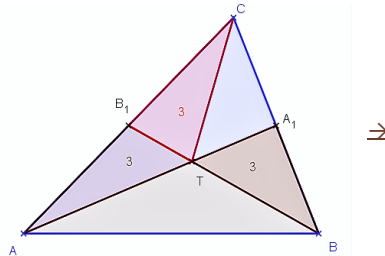
4. Stopa ako množina všetkých stredov T_p je zrejme úsečka C_1C_2 , kde C_1 je stred strany AB
5. **Ťažnica trojuholníka je množina všetkých stredov T_p priechok PQ**

6. Učiteľ nabáda žiakov, aby sformulovali otázky súvisiace s ťažnicami trojuholníka. Uvádžame niekoľko vhodných otázok:

- Môže ležať ťažnica mimo trojuholníka?
- Ako zostrojíme ťažnicu trojuholníka?
- Na aké trojuholníky rozdeľuje ťažnica trojuholník ABC ?

Pokračujeme v ďalšom experimente a hľadáme odpovede na otázky:

A. Na aké trojuholníky rozdeľuje ťažnica trojuholník ABC ?



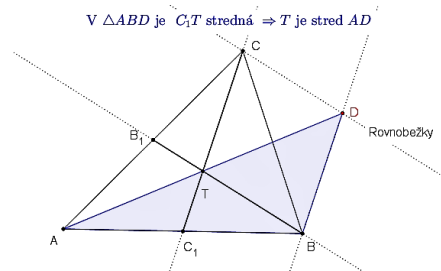
B. Na aké časti rozdeľuje ťažisko každú ťažnicu?

Experimenty sú spracované podľa práce: [LUK] Lukáč, S.: Bádateľský prístup k výučbe trojuholníkov. (Dostupné [TU](#)).

Veta.

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode T , ktoré nazývame ťažisko.

Konstruktívny dôkaz.



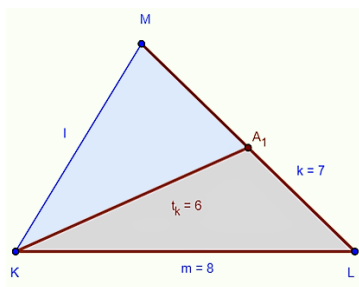
Otvorte si konštrukciu [TU](#).

1. Vyberieme (zvolíme si) dve ťažnice CC_1, BB_1 .
2. Zostrojíme rovnobežky s týmito ťažnicami v bodoch B, C_1 . Ich jednoznačnú existenciu zaručuje V. Euklidov postulát.
3. Zostrojíme priesečník D týchto rovnobežiek. Vznikne rovnobežník, v ktorom uhlopriečky BC, TD sa rozpoľujú.
4. V trojuholníku ABD je C_1T stredná prierečka, odkiaľ dostávame T je stred AD .
5. Podobne pre trojuholník ABC je B_1T stredná prierečka trojuholníka.
6. Z bodov 4 a 5 vyplýva, že priesečník $E = BC, TD$ je stred strany. Teda $E = A_1$, čo bolo treba dokázať.

Urobte dôkaz pomocou Cevovej vety aj pomocou afinity. Pozrite si dôkaz od Martina Vinklera [TU](#).

Príklad.

Zostrojte trojuholník KLM , ak je dané: $KL = 8\text{cm}$, $LM = 7\text{cm}$, $t_k = 6\text{cm}$.



Rozbor úlohy.

1. V trojuholníku KLA_1 poznáme dĺžky všetkých strán ($LA_1 = 1/2LM$).
2. Môžeme zostrojiť trojuholník KLA_1 pomocou vety *sss*.
3. Predĺžením strany LA_1 zostrojíme bod M .
 - urobte konštrukciu trojuholníka KLM podľa vyššie uvedeného rozboru (náš návrh [Tu](#)),
 - urobte diskusiu o počte riešení.

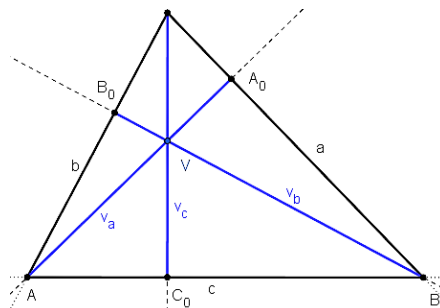
Výška a stredná priečka

Definícia.

Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva **výška trojuholníka**.

Výšky trojuholníka ABC budeme označovať v_a, v_b, v_c .

1. Výšky sa pretínajú v jednom bode V .
2. Tento bod sa nazýva **priesečník výšok** alebo **ortocentrum**, stiahnite si applet [Tu](#)

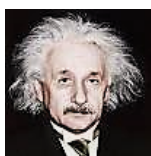


Úloha.

Zostrojte trojuholník, ak je daná výška v_c , uhol $\alpha = BAC$ a uhol $\beta = BCA$.

1. Urobte rozbor tejto úlohy a porovnajte s návrhom v priloženom applete [→](#).
2. V priloženom applete deaktivujte *Začiarkavacie políčko* a navrhните postup konštrukcie.
3. Urobte symbolický zápis konštrukčných krokov v geometrickom okne 2, pozrite si náš návrh [Tu](#) [→](#).
4. Prevedte dôkaz správnosti konštrukcie a urobte diskusiu.

Riešenie bez použitia rovnolehlosti nájdete na stránke [Príklady.eu](#) v časti Konštrukčné úlohy/Konštrukcia trojuholníka/Príklad 9 [Tu](#).



Albert Einstein [→](#) (Obrázok je prevzatý z Wikipédie)

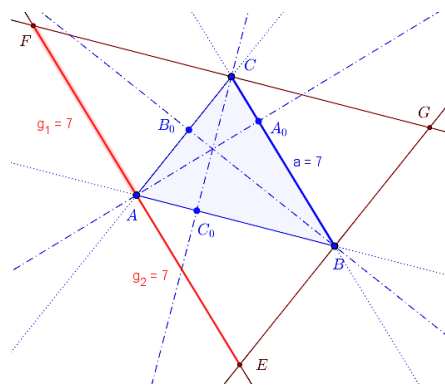
Keď som mal dvanásť rokov, zažil som zázrak iného druhu vďaka knižočke¹⁾ o Euklidovej geometrii roviny, ktorá sa mi dostala na začiatku školského roku do rúk.

- i. Boli to poučky, ako napríklad, že **tri výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode**.
- ii. Hoci to nie je v nijakom prípade evidentné, predsa sa to dalo dokázať s takou istotou, že pochybnosť sa zdala byť vylúčená.
- iii. Táto jasnosť a istota spravili na mňa neopísateľný dojem.

Veta (Ortocentrum trojuholníka).

Výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode.

Dôkaz, ktorý nadchol Einsteina.



Applet otvoríte [Tu](#).

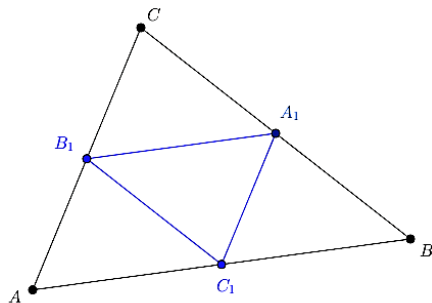
- Urobte analýzu tohto dôkazu. Zodpovedajte na otázky:
 - Prečo môžeme zostrojiť rovnobežky a', b', c' ?
 - Ktoré vlastnosti rovnobežníkov sa v dôkaze využívajú?
 - Vedeli by ste ich dokázať?
- Vaša argumentácia by mala vychádzať z elementárnych Euklidových tvrdení a postulátov.

Vyššie uvedený dôkaz sa opiera o dve základné tvrdenia:

- V rovnobežníku protiľahlé strany majú rovnakú veľkosť. Pozrite si [Euclid's Elements, Book I, Proposition 34](#).
- Priamka prechádzajúca stredom kruhu a stredom tetivy je kolmá na túto tetivu a rozpoľuje túto tetivu. [Euclid's Elements, Book III, P3](#).

Toto tvrdenie bolo pravdepodobne známe už Thálesovi.

V trojuholníku ABC sú dané stredy strán $A_1 \in CB, B_1 \in AB, C_1 \in AB$. Spojte tieto body úsečkami.



Dynamická konštrukcia [Tu](#).

Definícia (Stredná priečka trojuholníka).

Úsečky A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 sa nazývajú **stredné priečky** trojuholníka ABC .

Veta.

- Trojuholník ABC sa rozdelil na štyri "rovnaké, zhodné" trojuholníky:
 $\triangle AB_1C_1 \simeq \triangle A_1BC_1 \simeq \triangle A_1B_1C \simeq \triangle A_1B_1C_1$.
- Úsečky, ktoré vznikli spojením narysovaných stredov, sú rovnobežné s protiľahlými stranami trojuholníka.
- Úsečky, ktoré vznikli spojením narysovaných stredov, majú polovičnú dĺžku ako protiľahlé strany v trojuholníku.

Dôsledok.

- Stredná priečka trojuholníka je rovnobežná so stranou trojuholníka.

2. Jej veľkosť sa rovná polovici veľkosti strany, s ktorou je rovnobežná.

Trojuholníkové centrum

Definícia.

Bod trojuholníka, ktorý je invariantný vzhľadom na rovnoľahlosť, sa nazýva **trojuholníkové centrum** (triangle Center).

Najznámejšie sú napríklad

1. ťažisko, ortocentrum - popísané v predchádzajúcich častiach,
2. stred kružnice opísanej a vpísanej - budú charakterizované v ďalších častiach.

V súčasnosti je popísaných viac ako 16 tisíc trojuholníkových centier. Každý bod v zozname je identifikovaný indexovým číslom X_n a názvom.

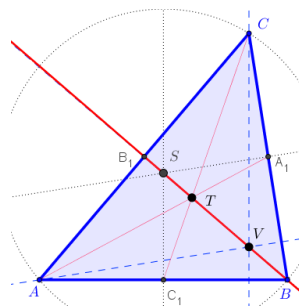
Encyclopedia of Triangle Centers reference	Name	Standard symbol	Trilinear coordinates
X_1	Incenter	I	$1 : 1 : 1$
X_2	Centroid	G	$bc : ca : ab$
X_3	Circumcenter	O	$\cos A : \cos B : \cos C$
X_4	Orthocenter	H	$\sec A : \sec B : \sec C$
X_5	Nine-point center	N	$\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B)$
X_6	Symmedian point	K	$a : b : c$

⇒

Menej známe ale často využívané v konštrukciách sú Eulerova priamka a Feurbachova kružnica deviatich bodov.

Definícia (Eulerova priamka).

V ľubovoľnom trojuholníku, s výnimkou rovnostranného, ležia ortocentrum O , ťažisko T a stred opísanej kružnice S na jednej priamke, ktorú nazývame **Eulerova priamka**. Pre ich vzdialenosti platí $|OS| = 2|TS|$. V rovnostrannom trojuholníku body O, T, S splývajú.

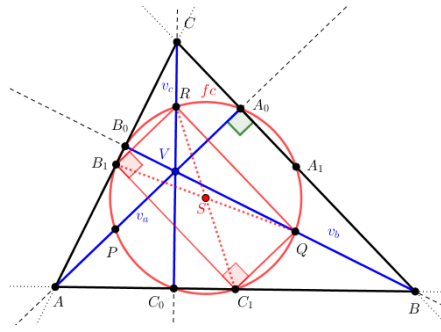


Konštrukciu si otvoríte [Tu](#).

Pozrite si dôkaz od Martina Vinklera, prípadne navrhnite iný dôkaz s využitím rovnoľahlosti [Tu](#).

Definícia (Feurbachova kružnica).

Nech ABC je všeobecný trojuholník, A_0, B_0, C_0 nech sú päty jeho výšok, A_1, B_1, C_1 nech sú stredy jeho strán, V nech je priesečník výšok a P, Q, R nech sú postupne stredy úsečiek AV, BV, CV . Potom 9 bodov $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, P, Q, R$ leží na jednej kružnici, ktorú nazývame **Feurbachova kružnica**. Pozrite si konštrukčný dôkaz [Tu](#).



Definícia.

Kružnica, ktorá prechádza všetkými tromi vrcholmi trojuholníka sa nazýva **kružnica opísaná trojuholníku**.

Konstruktívne pri hľadaní stredu opísanej kružnice postupujeme takto:

1. Zvolíme si ľubovoľné dve strany trojuholníka a zostrojíme ich osi .
2. Priesečník týchto osí je stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC .
3. Zároveň je nutné dokázať, že os tretej strany trojuholníka ABC prechádza vždy týmto priesečníkom.
(dôkaz už poznal Tháles) ($|AS| = |BS| \wedge |BS| = |CS| \Rightarrow |AS| = |CS|$).
4. Z tejto konštrukcie vyplýva aj tvrdenie, že každému trojuholníku možno opísať práve jednu kružnicu.

Z uvedenej konštrukcie ľahko zodpovieme na otázky:

1. Bude ležať stred kružnice opísanej S vždy vnútri trojuholníka?
2. Kde leží stred kružnice opísanej u pravouhlých trojuholníkov?

Tvrdenie.

Na osi úsečky AB ležia všetky stredy kružníc, ktoré prechádzajú obidvomi bodmi A, B .

Dôkaz uvádza Euklides v Knihe 1, Tvrdenie X., pozri kapitolu "Euklidovské konštrukcie".

Definícia.

1. Kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku sa nazýva **Tálesova kružnica**.
2. Stred Tálesovej kružnice leží v strede prepony AB trojuholníka ABC .
3. Hovoríme, že Tálesova kružnica je zostrojená nad priemerom AB .

Vlastnosti kružnice opísanej trojuholníku.

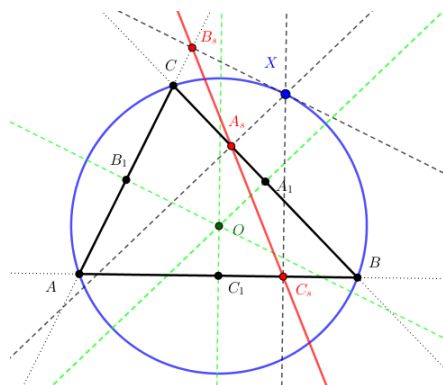
1. Veľkosť polomeru opísanej kružnice určuje vzťah $r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$
2. Spojnica stredu opísanej kružnice a vrcholu trojuholníka je kolmá k strane jeho ortického trojuholníka (tzv. **Nagelova veta** \Rightarrow).
3. Kružnica deviatich bodov je rovnoľahlým obrazom opísanej kružnice so stredom rovnoľahlosti v ťažisku trojuholníka a koeficientom $\kappa = -0,5$.

Ortický trojuholník je trojuholník, ktorý je tvorený spojnicami pat výšok trojuholníka.

Definícia.

Ak z ľubovoľného bodu X opísanej kružnice zostrojíme kolmice k jednotlivým stranám trojuholníka, tak päť týchto kolmíc

budú ležať na jednej priamke. Túto priamku nazývame **Simsonova priamka**. Ak bod X spojíme s ortocentrom (priesečník výšok trojuholníka), tak Simsonova priamka prechádza stredom tejto úsečky.



Dynamický obrázok otvoríte [TU](#).

Definícia. Kružnica, ktorá sa dotýka všetkých strán daného trojuholníka sa nazýva **vpísaná kružnica**.

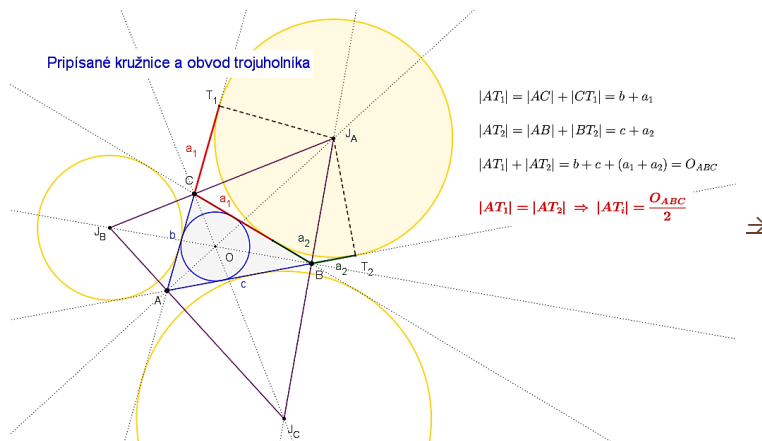
Vlastnosti

1. Stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečník osí jeho vnútorných uhlov.
2. Stred kružnice vpísanej trojuholníku je vnútorným bodom trojuholníka.
3. Polomer je vzdialenosť stredy od ľubovoľnej strany trojuholníka, pre jeho veľkosť platí:
 - $\rho = \frac{2S}{o}$ o = obvod trojuholníka, S = obsah
 - $\rho = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$
4. Vzdialenosť medzi stredmi kružnice vpísanej a opísanej je $d = \sqrt{r^2 - 2r\rho}$.

Cvičenie.

Zostrojte trojuholník ABC , pre ktorý je dané: $v_c = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $\rho = 2 \text{ cm}$ \Rightarrow .

Definícia. Kružnica, ktorá sa zvonka dotýka strany trojuholníka a dvoch priamok, ktoré sú predĺžením zvyšných strán trojuholníka sa nazýva **kružnica pripísaná trojuholníku**.



Vlastnosti

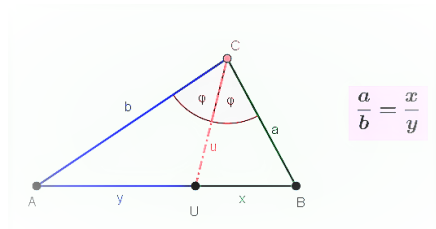
1. Stred kružnice pripísanej trojuholníku ABC je priesečník osi jedného vnútorného uhla a dvoch vonkajších uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch.

2. Každý trojuholník má tri pripísané kružnice.

3. Vzdialenosť vrcholu trojuholníka A od dotykového bodu T_i pripísanej kružnice je rovná polovici obvodu trojuholníka

$$|AT_i| = \frac{O_{ABC}}{2}.$$

Veta (Veta o osi vnútorného uhla). V každom trojuholníku platí, že os vnútorného uhla delí protiľahlú stranu v rovnakom pomere, ako je pomer dĺžok príslušných priľahlých strán.



Applet a dôkaz tejto vety je prevzatý od Martina Vinklera, applet otvoríte [TU](#).

Cvičenie.

1. Vyhľadajte v Euklidových Základoch tvrdenia - Kniha I. T/34 a Kniha III, T/3.
2. Vyhľadajte v literatúre iné dôkazy vety o ortocentre trojuholníka.

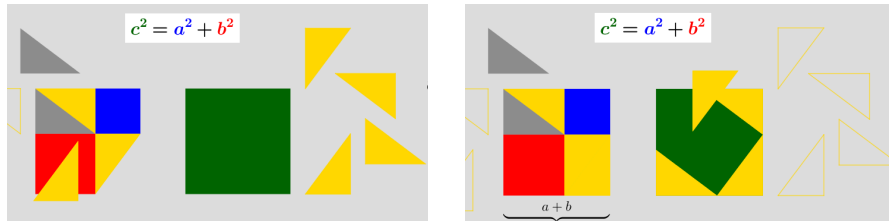
Pytagorova a Euklidove vety

Veta (Pytagorova veta).

V každom pravouhlom trojuholníku ABC , v ktorom prepona má veľkosť c a odvesny majú veľkosti a, b platí $c^2 = a^2 + b^2$.

Slovná formulácia Pytagorovej vety:

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.



Animáciu spustíte [Tu](#).

Pytagorova veta je pomenovaná podľa starogréckeho matematika Pytagora, ktorý ju odvodil v 6. storočí pred Kr.

1. Dôkazov Pytagorovej vety existuje veľmi veľa, viac ako 300, pozri na GeoGebre [Tu](#).
2. Vyhľadajte pôvodný Euklidov dôkaz v Knihe I, tvrdenie T/XLVII)
3. Pozrite si dôkaz Pytagorovej vety v programe GeoGebra, ktorý vychádza z Euklidovho dôkazu. Otvorte si applet [Tu](#).
4. Iné dôkazy Pytagorovej vety nájdeme na stránke [M. Viklera](#) alebo [Wikipedia](#).
5. Dôkaz "bez slov" [>](#). Doplňte "slová" pre tento dôkaz - urobte slovné/písomné zdôvodnenie.

Poznámky.

1. Pytagorova veta pravdepodobne bola známa aj v iných starovekých civilizáciách, napríklad v Číne, Egypte.
2. Starí Egypťania stavali pozoruhodné stavby, pri ktorých potrebovali vytyčovať aj pravé uhly. Robili to takto:
 - na špagáte uviazali rovnomerne 12 uzlov,
 - prvý a posledný uzol upevnili na tom istom mieste - A a štvrtý na mieste C a siedmy na B ,
 - vznikol pravý uhol ABC .

Veta (Obrátená pytagorova veta).

Ak v trojuholníku ABC platí pre dĺžky strán $c^2 = a^2 + b^2$, tak tento trojuholník je **pravouhlý** s preponou c .

Príklad.

Dané sú sústredné kružnice $k_1(S; r_1), k_2(S; r_2), r_1 > r_2$. Určte vzťah medzi obsahom medzikružia ohraničeného kružnicami k_1, k_2 a obsahom kruhu nad tetivou XY kružnice k_1 , ktorá sa dotýka kružnice k_2 . [Riešenie Tu](#).

Preskúmajte súvislosť tejto úlohy s dôkazom Pytagorovej vety aplikáciou Mamikonovej vety (Wiki odkaz [Tu](#)). Otvorte si applet [Tu](#)

Pytagorova veta uvedená v Euklidových Základoch: Kniha 1, tvrdenie XLVII).

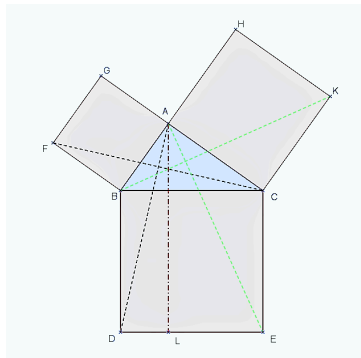
Veta (Pytagorova veta - znenie uvedené v Základoch).

V pravouhlých trojuholníkoch štvorec na strane oproti pravému uhlu ležiaci je rovný súčtu štvorcov na stranách, ktoré zvierajú pravý uhol.

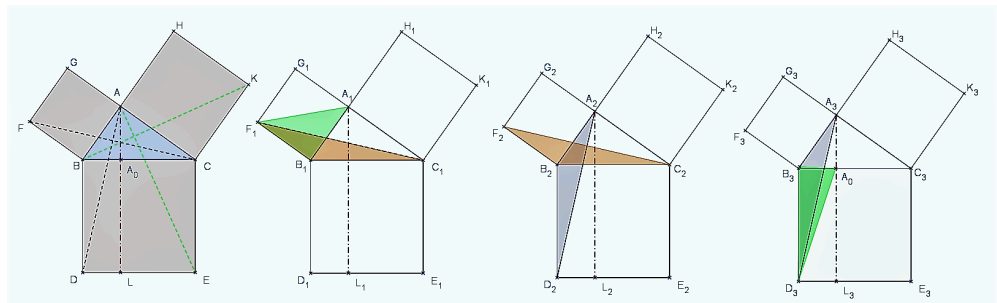
Text Euklidovho dôkazu je spracovaný podľa českého prekladu od Františka Servíta z roku 1907, je doplnený o (odkazy) na definície (Def.), axiomy (Post.), tvrdenia (T.) a Konceptie / Zásady (Kon.)

Dôkaz.

1. ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom BAC . Hovorím, že štvorec na BC sa rovná (súčetom) štvorcov na BA a AC .
2. Nech je narysovaný
 - na BC štvorec $BDEC$
 - na BA a AC štvorce GB a HC . (T.46)
3. Bodom A je vedená rovnobežka AL k BD alebo k CE (T.31) a spojnice (úsečky) AD a FC . (Post.1)
4. Vzhľadom na to, že každý z uhlov BAC a BAG je pravý, z toho vyplýva, že priamkou BA a bodom A na ňom dve priame línie AC a AG , ktoré nie sú ležiace na tej istej strane, spôsobujú, že susedné uhly sa rovnajú dvom pravým uhlom (Def.22)
 - preto CA je v priamke s AG (tvoria jednu priamku) (T.14)
 - z rovnakého dôvodu je BA tiež v priamke s AH .



5. Pretože uhol DBC sa rovná uhlu FBA , pretože každý je pravý (Post.4)
 - pridajte uhol ABC do každého, preto sa celý uhol DBA rovná celému uhlu FBC (Kon.2)
6. Keďže DB sa rovná BC a FB sa rovná BA (Def.22),
 - obe strany AB a BD sa rovnajú obom stranám FB a C a uhol ABD sa rovná uhlu FBC , preto základňa AD sa rovná základni FC a trojuholník ABD sa rovná (je zhodný) trojuholníku FBC . (T.4)



⇒

7. Teraz rovnobežník $BL(BDLA_0)$ je dvakrát väčší ako trojuholník ABD , pretože majú rovnakú základňu BD a sú medzi tými istými rovnobežkami BD a AL (majú spoločnú výšku). (T.41)
8. A štvorec $GB(ABFG)$ je dvakrát väčší ako trojuholník FBC , pretože opäť majú rovnakú základňu FB a sú medzi tými istými rovnobežkami FB a GC . (T.41)
9. Preto sa rovnobežník BL rovná štvorcu GB . (Kon.2)
10. Podobne, ak vedieme spojnice (úsečky) AE a BK , rovnobežník CL sa rovná štvorcu HC . Preto sa celý štvorec $BDEC$ rovná súčtu dvoch štvorcov GB a HC . (Kon.2)

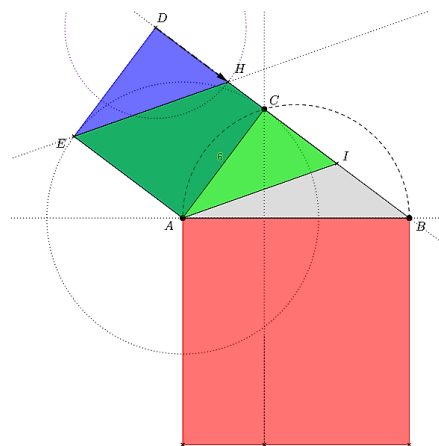
11. A štvorec $BDEC$ je narysovaný na BC a štvorce GB a HC na BA a AC . Teda štvorec na BC sa rovná súčtu štvorcov na BA a AC .

V dôkaze boli použité tieto zdroje z Euklidových Základov:

1. **Definícia 22:** Zo štvorstranných útvarov je štvorec, ktorý je rovnako rovnostranný a pravouhlý; obdĺžnik, ktorý je pravouhlý, ale nie rovnostranný; kosoštvorec, ktorý je rovnostranný, ale nie pravouhlý; kosodĺžnik, ktorý má opačné strany a uhly rovno navzájom, ale nie je ani rovnostranný, ani pravouhlý. Okrem týchto sú to štvoruholníky, ktoré sa nazývajú lichobežníky (rôznobežníky).
2. **Postulát 1:** Nech je úlohou nakresliť priamku z ktoréhokoľvek bodu do ktoréhokoľvek bodu. Tento prvý postulát hovorí, že vzhľadom na akékoľvek dva body, ako sú A a B , existuje priamka AB , ktorá ich má ako koncové body. (Porovnaj s postulátom 5).
3. **Postulát 4:** To, že všetky pravé uhly sa navzájom rovnajú.
4. **Tvrdenie 4:** Ak dva trojuholníky majú dve strany rovnajúce sa dvom stranám a majú uhly obsiahnuté v rovnakých rovných priamkach rovnaké, potom majú tiež základňu rovnú základni, trojuholník sa rovná trojuholníku a zostávajúce uhly sa rovnajú zostávajúcim uhlom respektíve, a sice oproti rovnakým stranám. Veta o zhodnosti trojuholníkov - sus
5. **Tvrdenie 14:** Ak na priamke a v bode na nej sú dve priamky, ktoré neležia na tej istej strane, sa súčet susedných uhlov rovná dvom pravým uhlom, potom sú tieto dve priamky navzájom k sebe v priamke (tvoria jednu priamku). Tvrdenie 31 Vytvor priamku cez daný bod rovnobežne s danou priamkou.
6. **Tvrdenie 41:** Ak rovnobežník má rovnakú základňu s trojuholníkom a je medzi tými istými rovnobežkami, rovnobežník je dvakrát väčší ako trojuholník.
7. **Tvrdenie 46:** Na danej priamke narysuj štvorec. (Súčasná matematická formulácia tejto vety: *Nad danou úsečkou je možné narysovať štvorec.*)
8. **Koncepcia/Zásada 2:** Ak sú rovnosti pridané do rovnováhy, potom celky sú rovnaké.
9. **Koncepcia/Zásada 5:** Celok je väčší než časť.

Cvičenie.

Vytvorte si vlastný applet, ktorým budete interpretovať Euklidov dôkaz Pytagorovej vety. Pozrite si náš návrh:



Applet [TU](#).

Veta (Euklidova veta o výške).

Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov prepony.

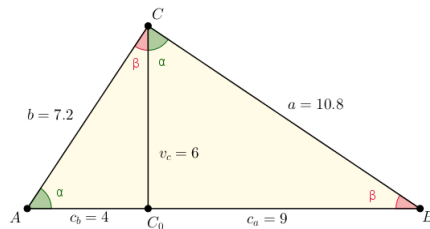
Dôkaz.

Nech v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je $v_c = CC_0$ výška na preponu AB .

Zrejme platí:

1. výška v_c pravouhlého trojuholníka rozdelí trojuholník na ďalšie dva pravouhlé trojuholníky,

2. päta výšky v_c rozdelí preponu na dva úseky príľahlé k odvesnám trojuholníka: c_a a c_b ,
3. zo vzťahu $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ dostávame $\alpha = 90^\circ - \beta$,
4. všetky tri vzniknuté **trojuholníky sú navzájom podobné**: $ACB \sim AC_0C \sim CC_0B$.



Dynamickú konštrukciu otvoríte [TU](#).

Z podobnosti trojuholníkov $ACB \sim AC_0C$ a $ACB \sim CC_0B$ vyplýva: $v_c : c_b = c_a : v_c$. Po úprave dostaneme vzťah $v_c^2 = c_a \cdot c_b$.

Tým je dôkaz Euklidovej vety o výške ukončený. Dôkaz, ktorý využíva zhodnosť od Vinklera nájdete [TU](#).

Veta (Euklidova veta o odvesne).

Obsah štvorca zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z prepony a príľahlého úseku.

Dôkaz.

Z podobnosti trojuholníkov ABC a CBC_0 vyplýva: $a : c = c_a : a$. Po úprave dostaneme vzťah $a^2 = c \cdot c_a$.

Z podobnosti trojuholníkov ABC a ACC_0 odvodíme druhú Euklidovu vetu $b^2 = c \cdot c_b$.

Cvičenie.

Dokážte Pytagorovu vetu pomocou Euklidových viet.

Zhodnosť a podobnosť trojuholníkov

Význam pojmov **Zhodnosť** a **Podobnosť** vo všeobecnosti možno vykladať rôznymi spôsobmi. V geometrii tieto termíny bežne sa používajú v prípadoch, ktoré sa týkajú merania. Prídavné meno **zhodné** (kongruentné) sa často používa na označenie predmetov, ktoré sa môžu prekrývať, zatiaľ čo **podobné** je voľnejšia myšlienka, ktorá spája predmety rovnakého charakteru.

1. Fráza "zhodné objekty" sa používa na opis útvarov, ktoré za určitých okolností navzájom sa dajú premiestniť tak, aby "sa prekrývali". Charakteristika dvoch zhodných geometrických útvarov sa v matematike opiera o systém axióm. Zhodné útvary majú rovnaké rozmery a možno ich prekrývať, zatiaľ čo podobné útvary sú tie, ktoré sa zdajú byť identické, ale nemožno ich prekrývať. Obe tieto frázy môžu v širších súvislostiach označovať množstvo iných vecí.
2. Termín "podobnosť" je odvodené z latinského slova "similis", čo znamená "ako alebo podobné". V matematickej oblasti si podobnosť vyžaduje dva objekty, ktoré majú rovnaký tvar, ale nie nevyhnutne rovnakú veľkosť.

Porovnávací tabuľka prevzatá z UnAcademy

	Zhodný	Podobný
Význam	Vzťahuje sa na postavy alebo čokoľvek iné, čo má rovnakú veľkosť a tvar a môže sa navzájom prekrývať.	Používa sa na opis postáv alebo iných objektov, ktoré majú podobnú veľkosť a tvar, ale nie sú identické z hľadiska rozmerov.
Presnosť	Geometricky "presné" a prekrývajúce sa útvary/obrazce sú známe ako zhodné útvary.	Slangová fráza pre identické postavy, ktoré majú veľa spoločného, pokiaľ ide o tvar ale nie veľkosť.
Orientácia	Dokonca aj keď sú umiestnené v opačných orientáciách, zhodné postavy sa navzájom prekrývajú.	Aj keď sú usporiadané v rovnakom smere, podobné objekty sa navzájom neprekrývajú.

Definícia.

1. Dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ sú **zhodné**, ak sa zhodujú vo všetkých odpovedajúcich stranách a vo všetkých odpovedajúcich uhloch. Označujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
2. Dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ sú **podobné**, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a odpovedajúce si uhly sú zhodné. Označujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Vety o zhodnosti trojuholníkov

Veta (o zhodnosti trojuholníkov).

- A. (sus) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom sú zhodné.
- B. (sss) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v troch stranách sú zhodné.
- C. (usu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch príľahlých, tak sú zhodné.
- D. (Ssu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej strane, tak sú zhodné.

Poznámka.

Uvedieme len dôkazy prvých dvoch viet tak, ako sú uvedené v Euklidových Základoch. Dôkazy viet (usu) a (Ssu) prenechávame čitateľovi ako cvičenie. Vyhľadajte v Základoch tieto vety a upravte Euklidove dôkazy tak, aby boli v súlade s modernou terminológiou.

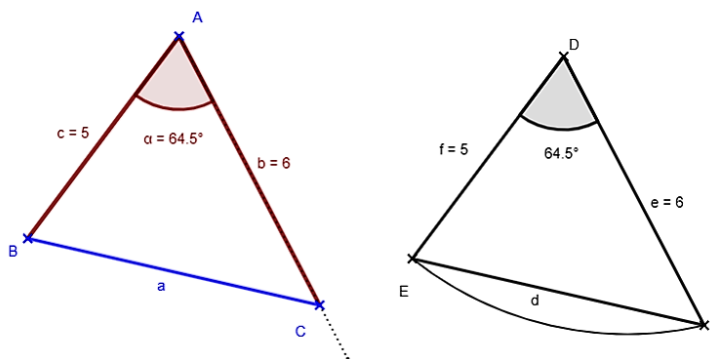
Dôkaz.

A. Euklidových Základoch je veta sformulovaná ako [Proposition 4 \(Euclid's Elements, Book I\)](#).

1. Nech ABC, DEF sú dva trojuholníky, ktoré majú dve strany AB, AC rovné dvom stranám DE, DF . Konkrétne AB rovná DE a AC rovná DF a uhol BAC je rovný uhlu EDF .
2. Hovorím (Euklides), že základňa BC sa rovná aj základni EF , trojuholník ABC sa rovná trojuholníku DEF a zostávajúce uhly sa rovnajú zostávajúcim uhlom, respektíve opačne rovnakým stranám. To znamená, že uhol ABC sa rovná uhlu DEF a uhol ACB sa rovná uhlu DFE .

Nepriamy dôkaz

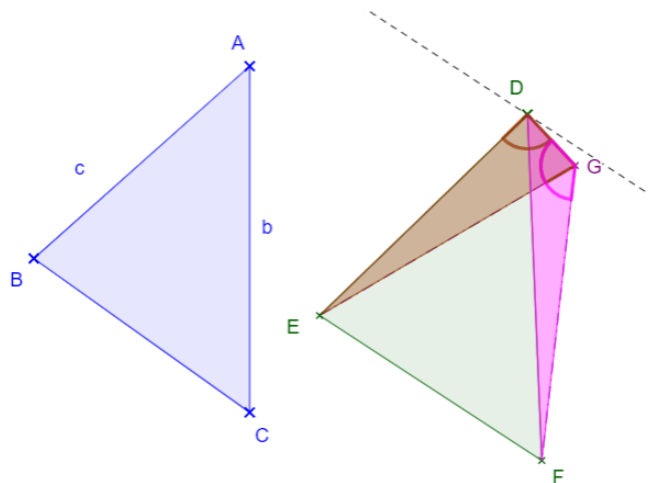
- i. Nech trojuholník ABC je uložený na trojuholníku DEF a ak je bod A umiestnený na bode D a priamka AB na DE .
 - Potom bod B sa zhoduje s bodom E , pretože AB sa rovná DE .
 - ii. Priamka AC sa tiež rovná DF , pretože uhol BAC sa rovná uhlu EDF .
 - Preto sa bod C zhoduje s bodom F , teda AC sa rovná DF .
 - iii. Ale B sa tiež zhoduje s E , a preto základňa BC sa zhoduje so základňou EF a rovná sa jej.
 - **V opačnom prípade by bodmi E, F boli určené dve rôzne úsečky** (priamky), čo je v spore s axiómou.
 - iv. Takže celý trojuholník ABC sa zhoduje s celým trojuholníkom DEF a rovná sa.
 - v. Zvyšné uhly sa zhodujú so zostávajúcimi uhlami a rovnajú sa, uhol ABC sa rovná uhlu DEF a uhol ACB sa rovná uhlu DFE .
3. Preto ak dva trojuholníky majú dve strany rovnobežné s dvoma stranami a majú uhly obsiahnuté rovnými čiarami rovnaké, potom majú aj základňu rovnú základni, trojuholník sa rovná trojuholníku a zvyšné uhly sú rovné zvyšným uhlom respektíve tým, ktoré sú oproti rovnakým stranám.



Ilustračný obrázok vety (sus).

B. V Euklidových Základoch je veta sss sformulovaná ako [Proposition 8 \(Euclid's Elements, Book I\)](#).

1. Nech trojuholník ABC je **prenesený** na trojuholník DEF tak, aby bod B bol umiestnený na bode E a priamka BC na EF .
2. Potom bod C sa prekrýva (zhoduje) s bodom F , pretože BC sa rovná EF .
3. Ukážeme, že aj úsečka BA resp. CA sa prekrýva (zhoduje) s úsečkou ED resp. FD . Budeme dokazovať nepriamo.
 - i. Nech základňa BC sa prekrýva (zhoduje) so základňou EF ale strany BA a AC sa neprekrývajú so stranami ED a DF (zobrazia vedľa ako EG a GF). Uvažujme prípad, keď bod G bude v polrovine \overrightarrow{DFL} .
 - ii. Z Euklidovho tvrdenia Proposition 7 (Euclid's Elements, Book I) vyplýva:
 - Keďže trojuholník EDG je rovnoramenný, tak uhol DGE rovná uhlu GDE .
 - Z polohy bodu G vyplýva, že uhol GDE je väčší ako uhol GDF .
 - Tiež trojuholník GDF je rovnoramenný, preto aj uhol GDF rovná uhlu DGF .
 - Z polohy bodu G vyplýva, že uhol GDF väčší ako uhol GDE , čo je spor.
 - Preto musí byť bod D totožný s bodom G .
 - Podobne postupujeme v prípade, ak bod G bude v polrovine \overrightarrow{DFE} .
4. Ukázali sme, že strana BA resp. AC sa prekrýva so stranou ED resp. DF . To znamená, že uhol BAC sa rovná uhlu EDF .
5. Teraz stačí použiť vetu *sus* a dostávame tvrdenie: trojuholníky ABC a DEF sú zhodné.

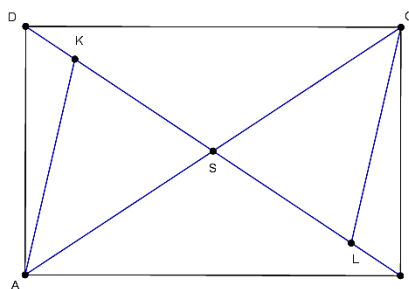


Konstruktívny dôkaz vety (sss) Tu.

Vety o zhodnosti trojuholníkov sa využívajú hlavne v úlohách, v ktorých sa skúmajú a dokazujú špecifické vlastnosti geometrických útvarov. Uvedieme niekoľko takých úloh.

Príklad 1. (Veta sus)

Je daný obdĺžnik $ABCD$. Nech body K, L , sú bodmi uhlopriečky BD , pre ktoré platí $SK = SL$. Dokážte, že trojuholníky ASK, CSL sú zhodné.



Otvorte dynamickú konštrukciu Tu.

Ľahko sa presvedčíme, že trojuholníky ASK, CSL sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom. Keďže

1. bod S je stred uhlopriečky (uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú)

2. uhly $\angle ASK, \angle CSL$ sú vrcholové, preto sú zhodné
3. úsečky SK, SL sú podľa predpokladu zhodné

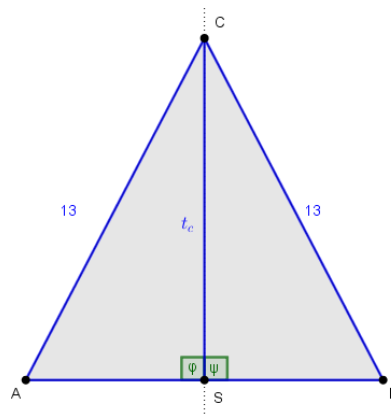
Ukázali sme, že **trojuholníky sa zhodujú** v dvoch stranách a uhle nimi zovretom, preto $BD \triangle ASK \simeq \triangle CSL$.

Dôsledok.

Zrejme platí aj $AK = CL$.

Príklad 2. (Veta sss)

Narysujte ľubovoľný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB . Zostrojte stred S strany AB . Čo platí pre trojuholníky ASC, BSC ? Ukážte, že platí $\triangle ASC \simeq \triangle BSC$.



Otvorte konštrukčný dôkaz TU

V trojuholníkoch ASC, BSC odpovedajúce strany majú rovnakú dĺžku. Keďže

1. ramená rovnoramenného trojuholníka sú zhodné úsečky,
2. stred S rozpoľuje základňu AB , preto $AS = BS$,
3. $v_c = CS$ je spoločná strana pre obidva trojuholníky *preto, BSC* preto platí :

V trojuholníkoch odpovedajúce strany majú rovnakú veľkosť, preto $\triangle ASC \simeq \triangle BSC$.

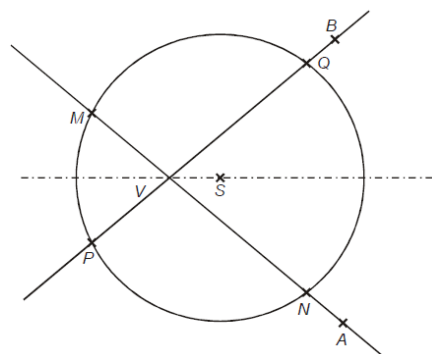
Poznámky.

1. Tháles: V rovnoramennom trojuholníku uhly pri základni sú zhodné.
2. Euklides: Základy/Proposition 5 (Euclid's Elements, Book I.)

Príklad 3. (Veta Ssu)

Na osi o ostrého uhla AVB zostrojte vnútri uhla AVB bod S . Zostrojte kružnicu $o k = (S, r)$ tak, aby platilo $r > VS$.

Označte priesečníky priamky AV s kružnicou k ako M, N a priesečníky priamky BV s kružnicou k ako P, Q .



Dokážte, že úsečky MN, PQ majú rovnakú veľkosť.

Analýza úlohy.

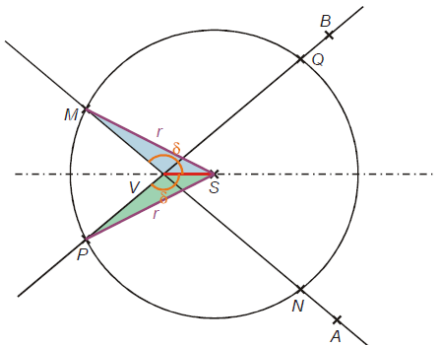
1. Najskôr sa pokúste dokázať rovnosť $VQ = VN$ pomocou zhodnosti trojuholníkov: $\triangle NVS \cong \triangle QVS$.

Pre tieto trojuholníky platí:

- strana VS je spoločná obom trojuholníkom
- $SN \cong SQ$ (polomery kružnice k)
- $\sphericalangle SVN \cong \sphericalangle SVQ$ (os uhla - zhodné polovice uhla $\sphericalangle BVA$)

Záver. Trojuholníky sú zhodné podľa vety Ssu , preto aj tretie strany sú zhodné: $VQ \cong VN$.

2. Potom dokážte rovnosť $VM = VP$ pomocou zhodnosti trojuholníkov: $\triangle PVS \cong \triangle MVS$.



Pre tieto trojuholníky platí:

- strana VS je spoločná obom trojuholníkom
- $SM \cong SP$ (polomery kružnice k)
- $\sphericalangle SVM \cong \sphericalangle SVP$ (súčet zhodných vrcholových uhlov a polovic uhla $\sphericalangle BVA$)

Záver. **Trojuholníky sú zhodné podľa vety Ssu , preto aj tretie strany sú zhodné: $VM \cong VP$**

3. K ukončeniu dôkazu si stačí uvedomiť, že úsečky MN a PQ získame sčítaním dvoch dvojíc zhodných úsečiek, platí $MN \cong PQ$.

Podobnosť

Definícia.

Dva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ sú podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a odpovedajúce si uhly sú zhodné.

Trojuholník $\triangle ABC$ je podobný trojuholníku $\triangle A_1B_1C_1$, práve vtedy keď existuje kladné číslo k také, že pre ich strany platí:

- $|AB| = k \cdot |A_1B_1|$,
- $|AC| = k \cdot |A_1C_1|$,
- $|BC| = k \cdot |B_1C_1|$

a pre ich uhly platí:

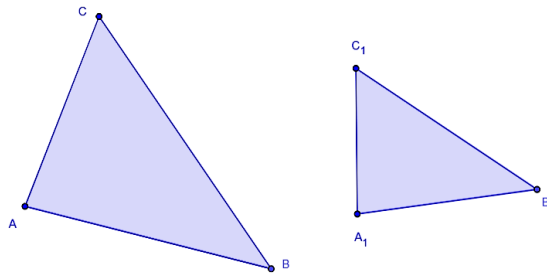
- $\alpha \simeq \alpha_1$,
- $\beta \simeq \beta_1$,
- $\gamma \simeq \gamma_1$.

Definícia.

Pomer k nazývame koeficient podobnosti trojuholníkov. Pre rôzne hodnoty koeficientu dostávame:

- $k > 1$ - zväčšenie,
- $k < 1$ - zmenšenie,
- $k = 1$ - trojuholníky sú zhodné.

Zistíte, či trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ sú podobné



Tu

Pohybujte trojuholníkom ABC alebo bodmi A a B

Príklad.

Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané jeho výšky v_a, v_b, v_c

Rozbor.

1. Hľadáme súvislosti medzi výškami trojuholníka a jeho stranami. Použijeme vzťah pro obsah trojuholníka:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v_a.$$

2. Z neho vyplýva, že $2 \cdot S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$ a teda $a : b : c = 1/v_a : 1/v_b : 1/v_c$.

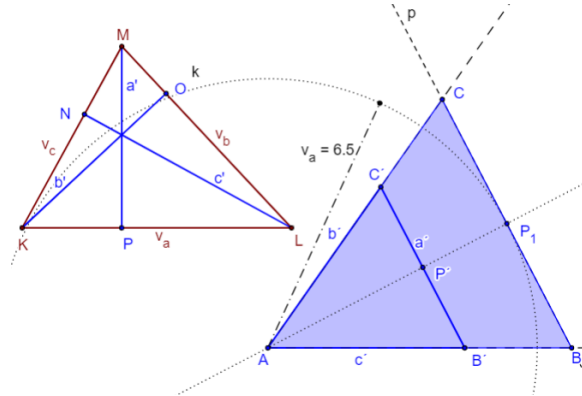
3. Označme $a' = 1/v_a, b' = 1/v_b, c' = 1/v_c$

4. Uvažujme o ľubovoľnom trojuholníku $A'B'C'$ so stranami a', b', c' .

5. Takýto trojuholník je podobný trojuholníku ABC , lebo pomer odpovedajúcich strán je konštantný.

Uvažujme teraz o ľubovoľnom trojuholníku KLM so stranami v_a, v_b, v_c .

1. V trojuholníku KLM označme jeho výšky a' , b' , c' .
2. Zrejme platí: $v_a : v_b : v_c = 1/a' : 1/b' : 1/c'$. Toto tvrdenie vyplýva z analýzy urobenej v druhom bode rozboru tejto úlohy.
3. Po úprave dostaneme $1/v_a : 1/v_b : 1/v_c = a' : b' : c' = a : b : c$.
4. Konštrukciu začneme zostrojením trojuholníka KLM so stranami v_a, v_b, v_c
 - následne zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ so stranami a', b', c'
 - nakoniec zostrojíme trojuholník ABC podobný trojuholníku $A'B'C'$.



Otvorte Tu

Diskusia. Úloha má práve jedno riešenie, ak výšky spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.

Dôkaz. Z rozboru a priamo z konštrukcie vyplýva, že pre výšky v zostrojenom trojuholníku platia vstupné hodnoty.

Kružnica, kruh

Definícia.

Množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od pevného bodu S vzdialenosť rovnú kladnému reálnemu číslu r sa nazýva **kružnica** so stredom S a polomerom r . Symbolicky

$$k = \{x \in \mathbb{E}^2; |SX| = r\}.$$

Množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od pevného bodu S vzdialenosť menšiu alebo rovnú číslu r sa nazýva **kruh** so stredom S a polomerom r . Symbolicky

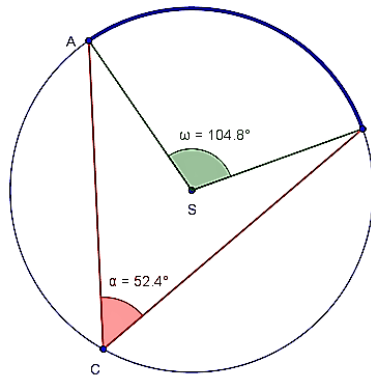
$$K = \{x \in \mathbb{E}^2; |SX| \leq r\}.$$

Bod S nazývame **stred kružnice** resp. stred kruhu a číslo $r > 0$ polomer kružnice resp. kruhu.

Ľubovoľné dva body kružnice delia túto kružnicu na dve časti, ktoré nazývame **oblúky kružnice** alebo kružnicové oblúky.

Dva polomery SA, SB rozdelia kruh na dve časti, ktoré nazývame **kruhové výseky**.

Tetiva AB rozdelí kruh na dve časti, ktoré nazývame **kruhové odseky**.



Otvorte si applet [TU](#).

Definícia.

1. Nech je daná kružnica $k(S; r)$ a body A, B , ktoré rozdeľujú kružnicu na dva kružnicové oblúky. Uhol ASB nazývame **stredový uhol** prislúchajúci k oblúku AB .
2. Ak na kružnici zvolíme tri body A, B, C , potom uhol ACB sa nazýva **obvodový uhol** prislúchajúci k oblúku AB .

V geometrii skúmame vlastnosti geometrických útvarov v dvoch základných kategóriách, ktoré zahŕňajú:

1. polohové vlastnosti,
2. metrické vlastnosti.

V tejto kapitole budeme skúmať:

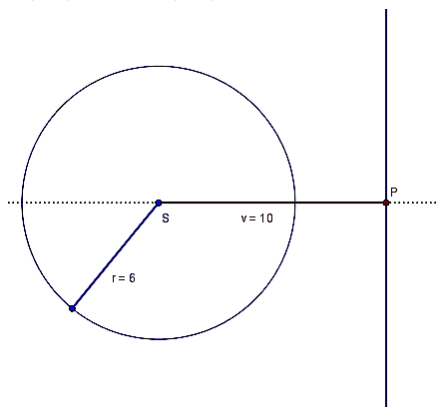
1. vzájomnú polohu priamky a kružnice,
2. vzájomnú polohu dvoch kružníc.

a z hľadiska metrického sa zameriame na:

1. vzťah medzi veľkosťou stredového uhla a prislúchajúcich obvodových uhlov v kružnici,
2. mocnosť bodu ku kružnici.

Nech je daná kružnica $k(S; r)$ a priamka p . Skúmame vzájomnú polohu kružnice k a priamky p .

Je daná kružnica $k(S; r)$ a priamka p . Nech $v = SP$ je vzdialenosť priamky od stredu kružnice k .
 Môžu nastať len tri prípady: $|SP| > r$, $|SP| = r$ alebo $|SP| < r$. Aktivujte zaškrtávacie políčko v applete.

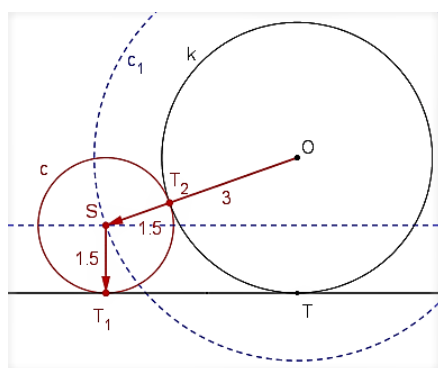


Otvorte si applet [TU](#).

1. Ak má priamka p od stredu S kružnice k vzdialenosť $v > r$, tak priamka p kružnicu k nepretína.
 - Priamka p sa nazýva **nesečnica** kružnice k .
2. Ak priamka má od stredu kružnice vzdialenosť rovnú polomeru $v = r$, tak má priamka s kružnicou jediný spoločný bod T .
 - Priamka, ktorá má s kružnicou jediný spoločný bod, sa nazýva **dotyčnica** kružnice.
 - Spoločný bod priamky a kružnice je bod dotyku.
 - Dotyčnica je vždy kolmá na polomer kružnice ST .
3. Ak má priamka od stredu kružnice vzdialenosť $v < r$, tak má priamka a kružnica dva rôzne spoločné body.
 - Priamka, ktorá má s kružnicou dva rôzne spoločné body, sa nazýva **sečnica** kružnice.
 - Spoločné body priamky a kružnice sú ich priesečníky.

Príklad.

Je daná kružnica $k(S; r)$ a jej dotyčnica t . Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú kružnice k tak aj priamky t a majú pritom polomer d .



Otvorte riešenie [TU](#).

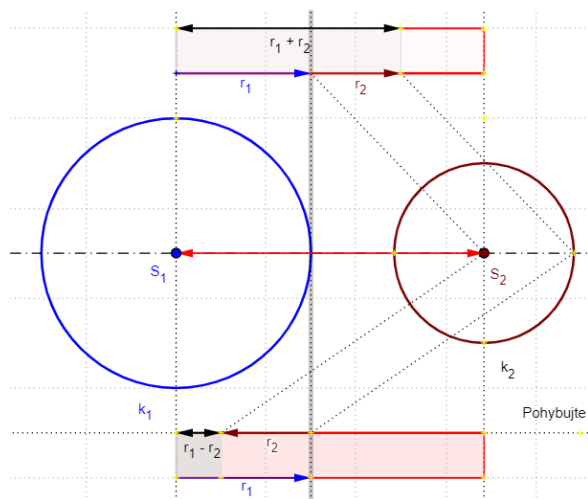
Definícia.

Dané dve kružnice $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ s rôznymi stredmi. Priamka (resp. úsečka) S_1S_2) sa nazýva **stredná** týchto dvoch kružníc.

Ak pre dve kružnice platí: $|S_1 S_2| > r_1 + r_2$,
 tak nemajú spoločný bod: $k_1 \cap k_2 = \emptyset$.
 Hovoríme, že kružnice ležia mimo seba.

Ak pre dve kružnice platí: $r_1 - r_2$, tak
 kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch A, B .

Ak pre dve kružnice platí:
 $0 < |S_1 S_2| < r_1 - r_2$, tak jedna kružnica
 leží vo vnútri druhej.



V applete zmeňte polohu bodu S_2 , otvorte applet [Tu](#).

Ak majú kružnice len jeden spoločný bod $k_1 \cap k_2 = T$, tak hovoríme, že **kružnice sa dotýkajú**.

1. Kružnice majú vonkajší dotyk, ak platí: $|S_1 S_2| = r_1 + r_2$.
2. Kružnice majú vnútorný dotyk, ak platí: $|S_1 S_2| = r_1 - r_2$.

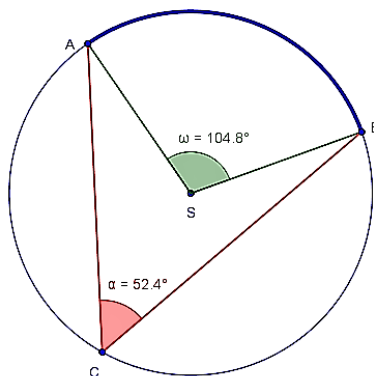
Veta o obvodových uhloch

Nech ACB je oblúk kružnice $k(S; r)$ a jemu prislúchajúci obvodový uhol $\sphericalangle ACB$. Skúmame jeho veľkosť.

Veta (O obvodových uhloch).

Ľubovoľné dva obvodové uhly prislúchajúce k tomu istému oblúku kružnice majú rovnakú veľkosť.

Obvodový uhol je polovicou stredového uhla prislúchajúceho k tomu istému oblúku.



Otvorte motivačný applet [Tū](#).

1. Priložený applet je motivačný a môžete ho využiť pri skúmaní závislosti veľkosti obvodových uhlov $\sphericalangle ACB$ od polohy bodu C .
2. Veľkosť obvodového uhla nezávisí od polohy bodu C , rozhodujúce sú body A, B resp. uhol ω .
3. Konštrukcia oblúka, z ktorého vidieť úsečku pod daným uhlom. Otvorte si konštrukciu [Tū](#).
4. Ak body A, B sú krajné body priemeru, tak rozdelia kružnicu na dve polkružnice: stredový uhol je priamy a obvodový uhol pravý.

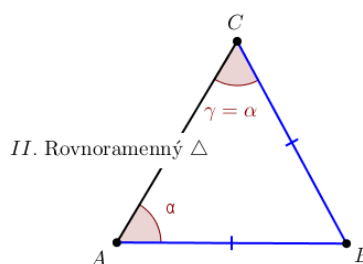
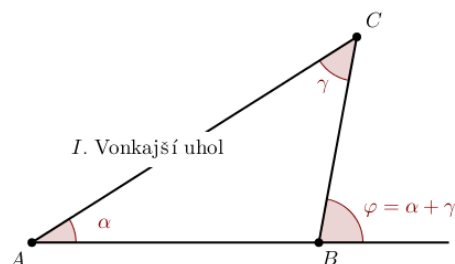
Definícia.

Množina vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou AB je kružnica k s priemerom AB okrem bodov A, B . Kružnicu k nazývame **Thálesova kružnica**.

Dôkaz (vety o obvodových uhloch).

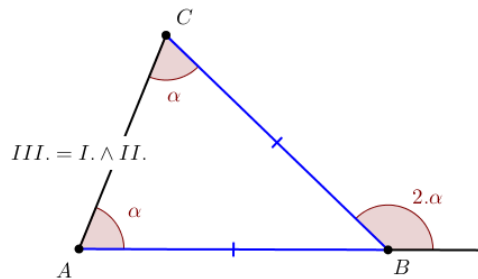
V dôkaze vety o obvodových uhloch sa využívajú dve základné vlastnosti trojuholníka.

1. "Vonkajší uhol trojuholníka sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných vrcholoch."
2. "V rovnoramennom trojuholníku sa uhly pri základni navzájom rovnajú" (Kniha 1, Tvrdenie V).



Spojením týchto dvoch tvrdení dostaneme:

Dôsledok.

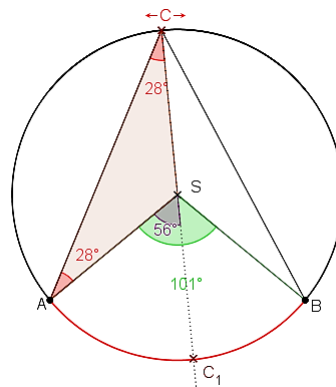


Prípád 1 (Veta o obvodových uhloch).

Nech S je vnútorný bod uhla $\angle ACB$. Potom obvodový uhol ACB je polovicou stredového uhla ASB .

1. Zvoľme bod C na kružnici $k(S, r = SA)$ tak, aby bod S bol vnútorný bod uhla $\angle ACB$.
2. Podľa predchádzajúceho dôsledku veľkosť vonkajšieho uhla $\angle ASC_1$ trojuholníka ASC pri vrchole S je rovná dvojnásobku veľkosti uhla $\angle SCA$ pri základni rovnoramenného trojuholníka ASC . Podobne pre trojuholník BSC platí $\angle BSC_1 = 2 \cdot \angle SCB$.
3. Odtiaľ dostávame

$$\angle ASB = 2 \cdot \angle ACB.$$



Konstruktívny dôkaz Tu

Prípád 2 (Veta o obvodových uhloch).

Nech S leží na ramene uhla $\angle ACB$. Potom obvodový uhol ACB je tiež polovicou stredového uhla ASB .

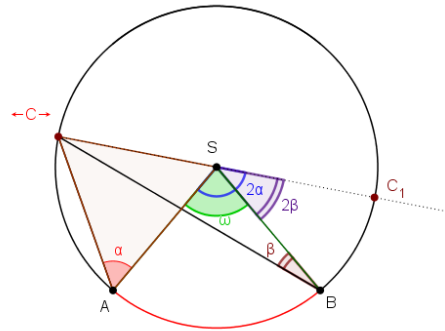
Posuňte bod C proti smeru hodinových ručičiek do krajnej polohy vľavo tak, aby body B, S, C ležali na jednej priamke (boli kolineárne). Potom dôkaz pre prípad 2 bude analogický ako v prípade 1. Situácia sa transformuje len na jeden trojuholník.

Prípád 3 (Veta o obvodových uhloch).

Nech S je vonkajší bod uhla $\angle ACB$. Potom obvodový uhol ACB je polovicou stredového uhla ASB .

Zrejme platí $\omega = \angle ASB = 2 \cdot \angle ASC_1 - 2 \cdot \angle BSC_1 = 2\alpha - 2\beta$. Pozrime sa na rozdiel uhlov pri vrchole C . Zistíme, že $\angle ACB = \angle ACS - \angle BCS$. Keďže trojuholníky ASC, BSC sú rovnoramenné, tak platí

$$\angle ACB = \alpha - \beta = \frac{\omega}{2}.$$



Pozrite si zaujímavý konštrukčný dôkaz od Martina Vinklera, ktorý je dostupný [Tu](#). Pre bod C môžu nastať len tieto tri prípady, preto je dôkaz vety o obvodových uhloch ukončený.

Príklad.

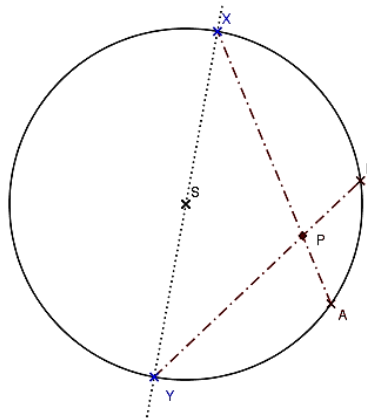
Je daná kružnica $k(S, r)$ a na nej dva body A, B . Pre každý priemer XY kružnice k zostrojíme (ak existuje) priesečník priamok AX, BY . Určte množinu všetkých takých priesečníkov. Budeme predpokladať, že AB nie je priemer kružnice. (Larson 8.1.2.)

V planimetrii sa pomerne často vyskytujú úlohy, v ktorých sa hľadá množina M bodov s danou vlastnosťou V . Symolicky to môžeme zapísať takto $M = \{X \in E^2; \text{ph}V(X) = 1\}$. Takéto množiny sa tiež označujú ako "Geometrické miesta bodov (GMB)". Riešenie takýchto úloh sa skladá z troch častí:

- Najskôr musíme určiť základné charakteristické prvky danej množiny (najčastejšie experimentálne) resp. komplexne popísať danú množinu M . Potom overiť platnosť výrokov:
- $X \in M \Rightarrow X$ má vlastnosť V ,
- ak X má vlastnosť V , tak patrí do množiny M .

V našom príklade budeme pri experimentovaní postupovať takto:

- Thalesova veta hovorí, že trojuholníky XAY, XBY sú pravouhlé s pravým uhlom pri vrcholoch A, B .
- Obvodové uhly $\angle AXB$ a $\angle BYA$ majú rovnakú veľkosť α .
- Označme si $\phi = \angle AXY$ a $\psi = \angle BYX$.
- Súčet uhlov v trojuholníku je 180° , preto bude $\phi + \alpha = 90^\circ - \psi$, $\psi + \alpha = 90^\circ - \phi$.
- Odtiaľ dostávame, že súčet uhlov $\phi + \psi$ je konštantný pre ľubovoľný priemer XY a dva pevné body A, B .
- Preto aj vrcholové uhly $\angle XPY = \angle APB$ majú konštantnú veľkosť. To znamená, že body P ležia na kružnicovom oblúku (APB) .
- K nájdeniu oblúka stačí zvoliť jeden priemer XY a jeden odpovedajúci priesečník $P = AX \cap BY$.



Otvorte si konštrukčný dôkaz [Tu](#).

Postup, ktorý sme popísali v týchto 7 krokoch, zahŕňa časť A aj časť B. Experimentálne sme stanovili, že množina M je kružnicový oblúk (APB) . Na overenie platnosti výroku " $X \in M \Rightarrow X$ má vlastnosť V " teraz stačí ukázať, že výroková

formula $[(1. \wedge 2.) \Rightarrow 4] \Rightarrow (5. \wedge 6.)$ je tautológia. To je však zřejmé. Keďže aj opačný postup $[(5. \wedge 6.) \Rightarrow 4.] \Rightarrow 1.$ je tautológia, tak aj časť C je pravdivý výrok.

Poznámky.

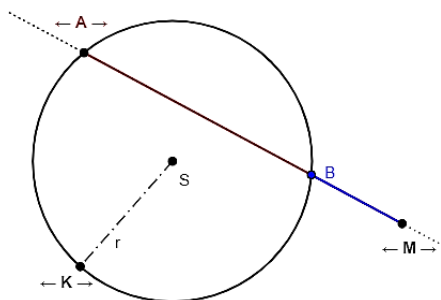
1. Pri určovaní GMB je mnohokrát najťažší krok A.
2. Program GeoGebra tento krok zjednoduší tým, že pomocou nástroja "Množina bodov" (nachádza sa v sekcii nástrojov "Kolmica") vykreslí hľadanú množinu M .
3. Potom je však nutné realizovať kroky B a C.
4. Pozrite si aplikovanie tohto nástroja v kurze Didaktika matematiky v knihe Množiny bodov. Dostupné [Tu](#).

Mocnosť bodu ku kružnici

Je daná kružnica $k(S, r)$ so stredom S a polomerom r . Bod M leží vonka kružnice. Nech p je sečnica kružnice k vedená bodom M a A, B sú priesečníky sečnice s kružnicou k .

Skúmame súčin $m = |MA| \cdot |MB|$. Po otvorení motivačného appletu "MOBOKEKR" od Martina Vinklera a experimentovaním s polohou bodu M , môžeme vysloviť hypotézu:

Súčin $m = |MA| \cdot |MB|$ je konštantný.



Otvorte si motivačný applet [Tu](#).

Otázky.

Je súčin $m = |MA| \cdot |MB|$ nezávislý od polohy sečnice $p = \overleftrightarrow{AB}$? Inými slovami je konštantný pre ľubovoľnú polohu bodov A, B ?

Môžeme definovať súčin aj pre prípad, ak bod M leží vo vnútri kružnice $k(S, r)$? Odpovede nájdeme vo forme dôkazov viet o mocnosti.

Definícia (Mocnosť bodu ku kružnici).

Ľubovoľnému bodu M roviny možno priradiť reálne číslo m , pre ktorého absolútnu hodnotu platí $|m| = |MA| \times |MB|$, pričom

1. $m > 0$ pre bod M ležiaci mimo kružnice (vonkajší bod kružnice),
2. $m = 0$ pre bod M ležiaci na kružnici (bod kružnice),
3. $m < 0$ pre bod M ležiaci vnútri kružnice (vnútorný bod kružnice).

Číslo m sa nazýva **mocnosť bodu M ku kružnici k** .

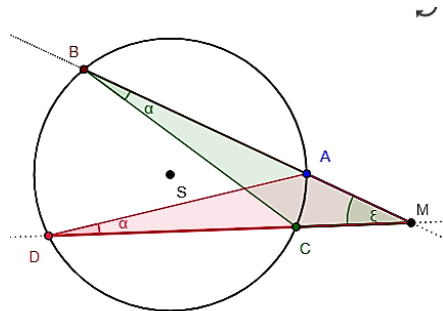
Veta 1.

Mocnosť bodu M ku kružnici $k(S, r)$ nezávisí od polohy sečnice kružnice, ktorá prechádza bodom M .

Dôkaz.

1. Uvažujme o trojuholníkoch $\triangle MCA, \triangle MBD$.
2. Obvodové uhly k oblúku AC pri vrcholoch B, D sú zhodné.
3. Uhol ξ pri vrchole M je spoločný pre obidva trojuholníky.
4. Trojuholníky $\triangle MCA, \triangle MBD$ sú podobné.
5. Pre pomery odpovedajúcich strán platí $\frac{|MB|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MA|}$.
6. Odtiaľ dostávame $|MA| \times |MB| = |MC| \times |MD| = \text{konštanta}$.

7. Tým je dôkaz ukončený.



Otvorte si konštrukčný dôkaz [Tú](#).

Dôsledok.

Súčin $|MA| \times |MB|$ sa rovná číslu $v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$ a r je polomer kružnice $k(S, r)$.

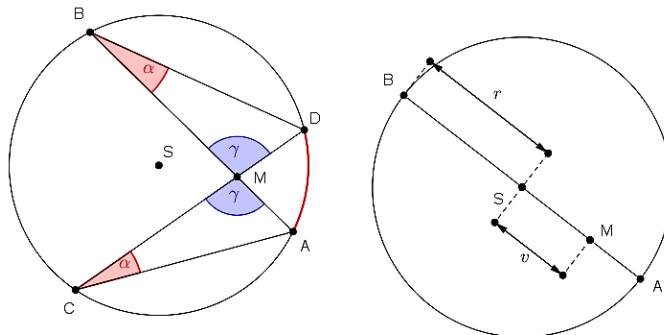
Dokázať tento dôsledok je veľmi jednoduché. Stačí zvoliť sečnicu CD tak, aby prechádzala stredom kružnice. V takom prípade bude

- $|MD| = |MS| + |SD| = v + r$ a
- $|MC| = |MS| - |SC| = v - r$.

Po vynásobení $(v + r)(v - r) = v^2 - r^2$.

Poznámka.

V prípade, keď bod M leží vo vnútri kružnice tvrdenie vety 1 a tvrdenie dôsledku ostáva v platnosti. Trojuholníky $\triangle MCA, \triangle MBD$ sú podobné. Navyiac v súlade s definíciou mocnosti bodu ku kružnici, bude v prípade bodu ležiaceho vo vnútri kružnice, číslo $m = v^2 - r^2$ záporné. Pozrite si ilustračný obrázok.



Nasledujúca veta platí len v prípade, že bod M je mimo kružnice k . Mocnosť bodu M v tomto prípade môžeme vyjadriť pomocou veľkosti úsečky $|MT|$, kde T je dotykový bod dotýčnice ku kružnici, ktorá prechádza bodom M .

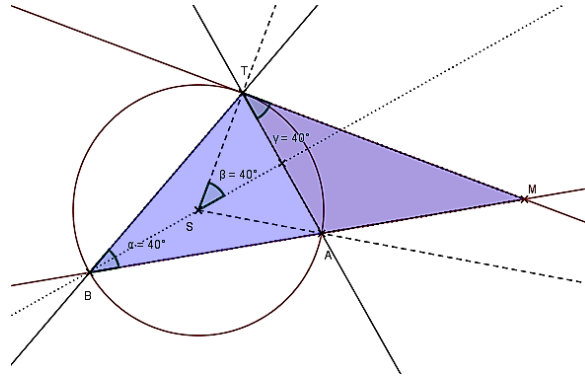
Veta 2.

Pre mocnosť bodu M , ktorý leží zvonka kružnice $k(S, r)$, platí rovnosť $m = |MT|^2 = v^2 - r^2$. Bod T je dotykový bod dotýčnice, ktorá prechádza bodom M .

Dôkaz vety 2 ilustrujeme ako limitný prechod vo veta 1.

1. Vzťah $|m| = |MA| \times |MB|$ platí pro ľubovoľnú sečnicu.
2. Pohybujeme sečnicou tak, aby sa postupne blížila k dotýčnici v bode T .
3. Bod A i bod B sa blížia k bodu T .
4. Veľkosť úsečky MA sa blíži k veľkosti úsečky MT .

5. Z toho usudzujeme, že súčin $MA \times MB$ sa blíži k súčinu $MT \times MT = MT^2$.



Pomocou obrázka urobte korektný matematický dôkaz. Využite podobnosť trojuholníkov $\triangle MAT, \triangle MTB$, ktoré majú zhodné uhly. Pre pomery odpovedajúcich strán platí $\frac{|MA|}{|MT|} = \frac{|MT|}{|MB|}$.

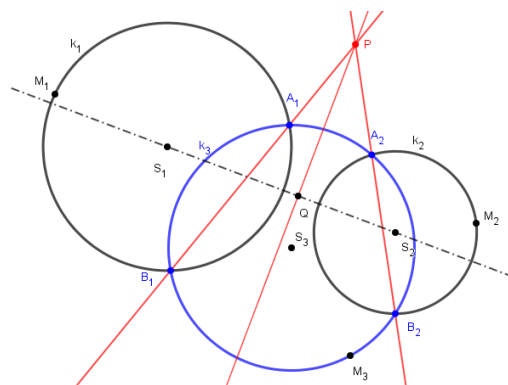
Pri odvodení vzťahu $m = |MT|^2 = v^2 - r^2$ môžeme využiť skutočnosť, že trojuholník MST je pravouhlý a použiť Pytagorovu vetu.

Definícia (Chordála a chordický bod).

Majme dve nesústredné kružnice $k_i(S_i, r_i), i = 1, 2$. Množina všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam je priamka kolmá k spojnici stredov týchto kružníc. Nazývame ju **chordála**.

Korektnosť definície a konštrukcia chordály.

- Dané kružnice $k_i(S_i, r_i), i = 1, 2$ sa pretínajú v dvoch bodoch/priesečníkoch. Priamka určená priesečníkmi daných kružníc je spoločná sečnica oboch kružníc. Preto ľubovoľný bod priamky určenej týmito priesečníkmi má rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Priamka určená priesečníkmi daných kružníc je chordála daných kružníc.
- Kružnice sa dotýkajú v bode, ktorý má mocnosť $m = 0$ k obom kružniciam. Chordála je spoločná dotyčnica v bode. Dôkaz, že spoločná dotyčnica je množina bodov s rovnakou mocnosťou k obom kružniciam, vyplýva z vety 2.
- V prípade, že kružnice nemajú spoločný bod zvolme pomocnú kružnicu $k_3(S_3, r_3)$, ktorá pretína obe kružnice $k_i(S_i, r_i), i = 1, 2$. Zostrojme chordály $chord(k_i, k_3) = A_i B_i, i = 1, 2$. Ich priesečník označme P . Tento bod má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam. Nazývame ho **chordický bod**. Týmto bodom potom vedieme kolmicu k úsečke, čo je chordála kružníc $k_i(S_i, r_i), i = 1, 2$. Aktivujte si priložený applet.



Otvorte applet [Tu](#).

Cvičenie II

1. Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$, pre ktorý sú dané ťažnice t_a, t_b, t_c .
2. Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$, pre ktorý je dané: $\triangle ABC : AB, v_a, t_c$. Riešenie vyhľadajte v práci [DAV, 2005].
3. Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$, pre ktorý je daná výška AA_0 , ťažnica t_a a stred opísanej kružnice S . Riešenie [Tu](#).
4. Daná je úsečka AA_0 a priamka p . Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$ s vrcholom A a výškou AA_0 , ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p . Pozri 56. ročník MO, šk. rok 2006/2007, úloha B – I – 6. Riešenie [Tu](#).
5. Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$, pre ktorý je daná výška v_a a ťažnice t_a, t_b .
6. Zostrojte trojuholník $\triangle ABC$, pre ktorý sú dané výšky v_a, v_b, v_c .
7. Dokážte, že pre ťažnice t_a, t_b, t_c platí vzťah: $\frac{1}{2}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c$. Pozri prácu [KRI], str. 19.
8. Dokážte, že ťažnice v ľubovoľnom trojuholníku sa pretínajú v jednom bode pomocou osovej afinity.

Zobrazenia

Definícia.

Pod geometrickým zobrazením v rovine \mathbb{E}_2 rozumieme predpis f , ktorý ľubovoľnému bodu $X \in \mathbb{E}_2$ priradí najviac jeden bod $X' = f(X)$.

V tejto kapitole sa budeme skúmať

1. zhodné a podobné zobrazenia,
2. osovú afinitu,
3. stredovú kolineáciu,
4. kruhovú inverziu.

Definícia.

Zobrazenie $f: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ nazývame **zhodné zobrazenie** v (\mathbb{E}_2), ak pre každé dva rôzne body $X, Y \in \mathbb{E}_2$ platí

$$X'Y' \cong XY,$$

kde $X' = f(X), Y' = f(Y)$. Zhodné zobrazenia predstavujú geometrické zobrazenia euklidovskej roviny, ktoré zachovávajú incidenciu útvarov a vzdialenosť bodov (metriku).

Rovinné geometrické útvary U_1, U_2 sa nazývajú **zhodné**, ak existuje zhodné zobrazenie, ktoré jeden z nich zobrazí na druhý. Zhodnosť dvoch útvarov symbolicky označíme takto: $U_1 \simeq U_2$ alebo takto $U_1 \cong U_2$.

Definícia.

1. Zhodné zobrazenie, ktoré nemení orientáciu trojice nelineárnych bodov nazývame **priama zhodnosť**. Zobrazenie, ktoré nie je priama zhodnosť sa nazýva nepriama zhodnosť.
2. Útvar U nazývame **samodružným** zobrazením f , ak sa v zobrazení f zobrazí sám do seba, t.j. $f(U) = U$.

V euklidovskej rovine poznáme **šesť typov zhodných zobrazení** a to

- identitu,
- osovú súmernosť,
- stredovú súmernosť,
- otočenie (rotáciu),
- posunutie (transláciu),
- posunutú súmernosť.

Tvrdenie.

Zložením dvoch zhodných zobrazení je zhodné zobrazenie.

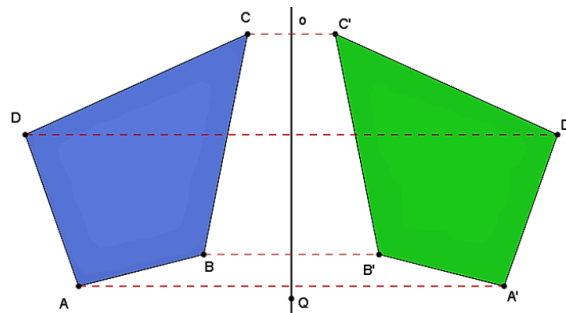
Dôkaz tohto tvrdenia prenechávame na čitateľa.

Definícia.

Nech o je daná priamka. Zobrazenie, pre ktoré platí:

1. obrazom bodu X ležiaceho na priamke o je bod X' , ktorý je totožný s bodom X ,

2. obrazom bodu X neležiaceho na priamke o je bod X' , pre ktorý platí, že priamka XX' je kolmá na priamku o a stred úsečky XX' leží na priamke o , nazývame **osová súmernosť**,
3. Priamku o nazývame **os osovej súmernosti**. Osovú súmernosť s osou o budeme označovať symbolom $\sigma(o)$.



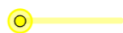
Otvorte si applet [TU](#).

Cvičenie.

Je daná priamka p a body A, B ležiace v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p . Určte bod $X \in p$ tak, aby súčet $|AX| + |BX|$ bol čo najmenší.

Riešenie [TU](#).

Stredová súmernosť a rotácia

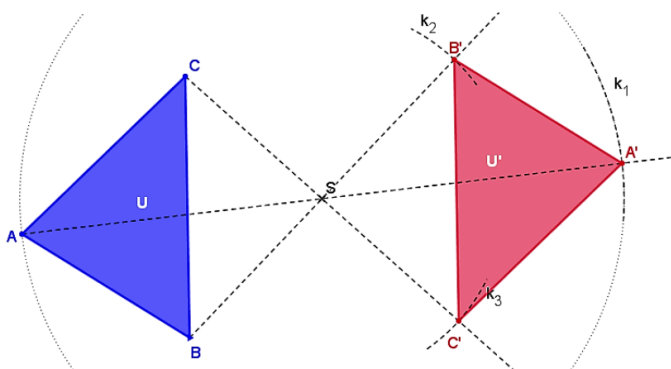


Otvorte applet od autora [Daniel Mentrard Tu](#).

Definícia.

Nech S je daný bod. Zobrazenie, pre ktoré platí:

1. obrazom bodu S je bod S ,
2. obrazom bodu $X \neq S$ je bod X' , pre ktorý platí, že bod S je stredom úsečky XX' nazývame **stredová súmernosť**,
3. bod S sa nazýva **stred** otáčania.

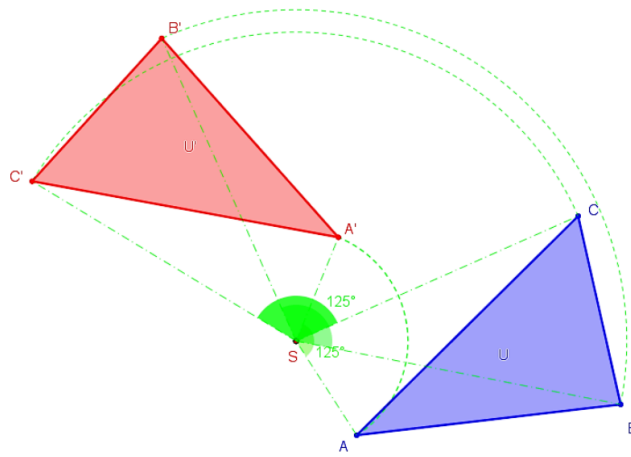


Otvorte si dynamickú prezentáciu [Tu](#).

Definícia.

Nech je daný bod S , uhol α (veľkosť uhla je nanajvýš 360°) a orientácia kladná (proti smeru hodinových ručičiek) resp. záporná (v smeru hodinových ručičiek). Zobrazenie, pre ktoré platí:

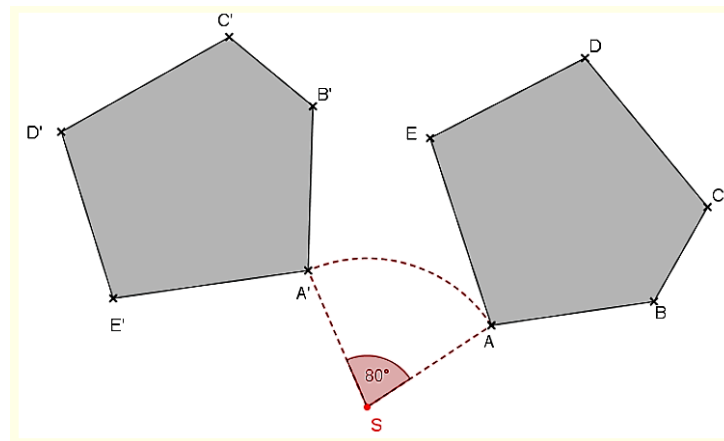
1. obrazom bodu S je bod S ,
2. obrazom bodu $X \neq S$ je bod X' , ktorý leží na kružnici $k(S; SX)$ a zároveň uhol XSX' je zhodný s uhlom α , pričom orientácia je kladná, resp. záporná, sa nazýva **otočenie**,
3. Bod S sa nazýva **stred** otočenia. Otočenie so stredom S a uhlom α a kladnou resp. zápornou orientáciou budeme označovať $\rho_{S;-\alpha}$.



Otvorte si applet [TU](#).

Tvrdenia (Rozklad zhodnosti na osové súmernosti).

1. Identitu možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú totožné. (Dôkaz prenechávame na čitateľa).
2. Každú stredovú súmernosť možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú na seba kolmé a prechádzajú stredom stredovej súmernosti.
3. Každú rotáciu možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi prechádzajú stredom rotácie, zvierajú uhol, ktorého veľkosť sa rovná jednej polovici veľkosti uhla rotácie, pričom orientácia uhla rotácie je súhlasná s orientáciou uhla od osi prvej osovej súmernosti ku osi druhej osovej súmernosti podľa poradia v zložení.



Otvorte konštrukčný dôkaz [TU](#).

Cvičenie (Stredová súmernosť).

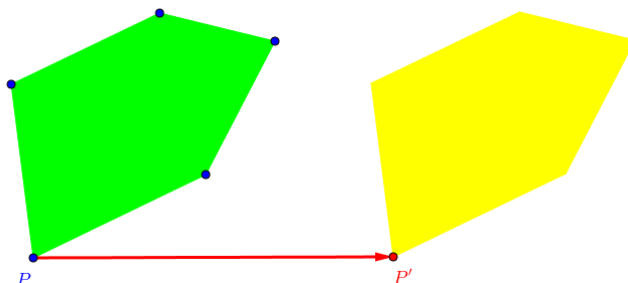
Sú dané dve sústredné kružnice $k_1(O, r_1); k_2(O, r_2); r_1 > r_2$ a bod S vo vnútri k_2 . Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, že $A, B \in k_1; C, D \in k_2$ a bod S je jeho stredom. Riešenie [TU](#).

Posunutie

Definícia.

Daný je vektor \vec{u} . Zobrazenie, pre ktoré platí, že obrazom bodu X je bod X' , pričom platí rovnosť vektorov $\vec{u} = \vec{XX'}$, sa nazýva **posunutie** alebo translácia.

Vektor \vec{u} nazývame **vektor posunutia**. Posunutie o vektor \vec{u} budeme označovať $\tau_{\vec{u}}$.

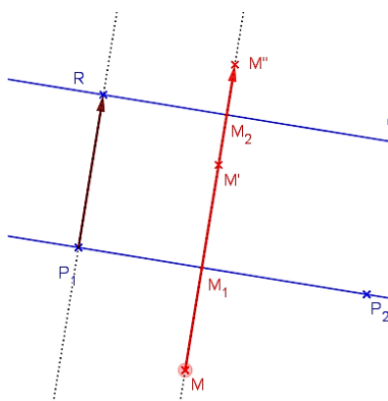


Otvorte si applet [Tu](#).

Tvrdenie.

Každé posunutie možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú rovnobežné (rôzne), zároveň sú kolmé na vektor posunutia, ich vzdialenosť je rovná jednej polovici veľkosti vektora posunutia, pričom orientácia vektora posunutia je súhlasná s orientáciou od osi prvej osovej súmernosti ku osi druhej osovej súmernosti podľa poradia v zložení.

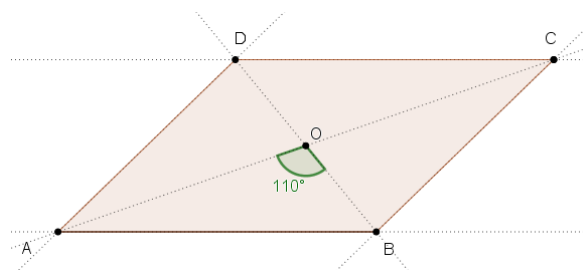
Určenie vektora posunutia, ak posunutie je dané dvomi osovými súmernosťami je prezentované appletom "Posunutie".



Otvorte si applet "Posunutie" [Tu](#).

Definícia.

Zostrojte rovnobežník ak sú dané veľkosti jeho strán a , b a veľkosť ϕ uhla, ktorý zvierajú jeho uhlopriečky.



Otvorte si riešenie [Tu](#).

Definícia.

Zobrazenie, ktoré je zložením osovej súmernosti a posunutia (v ľubovoľnom poradí), pričom os osovej súmernosti a vektor posunutia sú rovnobežné, nazývame **posunutá súmernosť**; (posunutú súmernosť danú osou o a vektorom \vec{u} budeme označovať $\psi_{o;\vec{u}}$).

Poznámka.

V niektorej literatúre sa pre posunutú súmernosť používa názov **posunuté zrkadlenie**.

Tvrdenie

Zložením troch osových súmerností s navzájom rôznymi osami je buď osová súmernosť alebo posunutá súmernosť.

Dôkaz

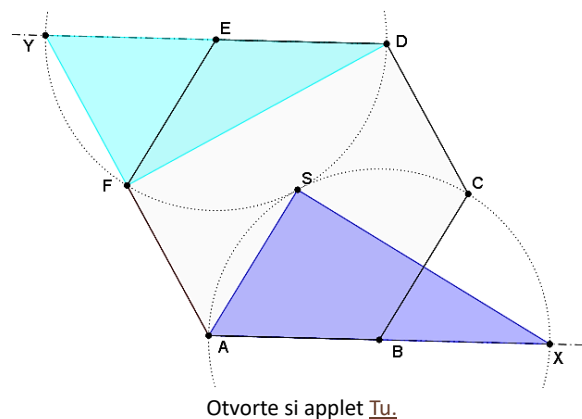
Nech sú dané osové súmernosti $\sigma(o_1), \sigma(o_2), \sigma(o_3)$ a nech $o_1 \neq o_2 \neq o_3 \neq o_1$ sú navzájom rôzne priamky. Pre vzájomnú polohu týchto troch priamok môžu nastať 3 prípady:

1. Všetky priamky sú navzájom rovnobežné \rightarrow výsledné zložené zobrazenie je **osová súmernosť**.
2. Dve sú rovnobežné a tretia ich pretína \rightarrow výsledné zložené zobrazenie je **posunutá súmernosť**.
3. Priamky ležia na stranách trojuholníka (navzájom sú rôznobežné) \rightarrow výsledné zložené zobrazenie je **posunutá súmernosť**. Otvorte si applet [T.u.](#)

Cvičenie

Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$ a body X, Y , pričom $(ABX) = (DEY) = 2$. Nájdite vhodné zobrazenie, ktoré zobrazí trojuholník AXS do trojuholníka YDF . Bude to priama alebo nepriama zhodnosť?

Riešenie

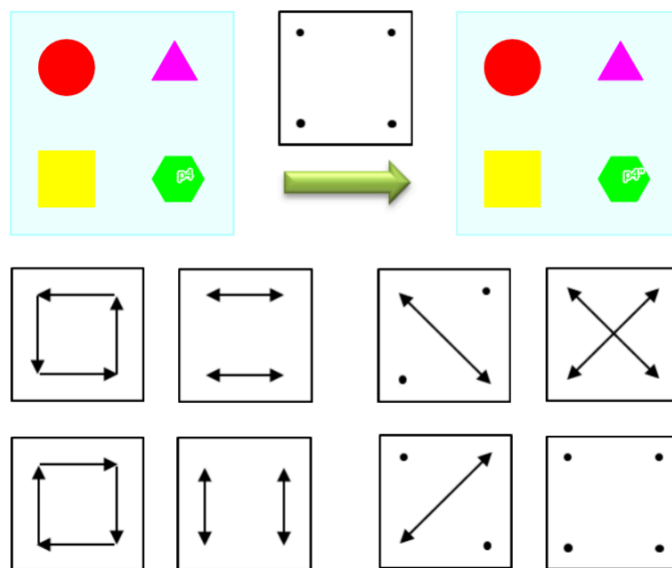


Grupa zhodných zobrazení

Tvrdenie.

1. Zloženie ľubovoľného konečného počtu osových súmerností možno vždy redukovať **na zloženie maximálne troch osových súmerností**. Pozrite si konštrukčný dôkaz [Tu](#) resp. [Tu](#).
2. Zložením ľubovoľného konečného počtu zhodných zobrazení je identita, alebo osová súmernosť, alebo stredová súmernosť, alebo rotácia, alebo translácia, alebo posunutá súmernosť.
3. Všetky zhodnosti v rovine tvoria vzhľadom na skladanie zobrazení grupu (tzv. grupu zhodností). Generátorom grupy zhodností je osová súmernosť.

Zhodnosti reprodukuje štvorec tvoria podgrupu. Pozrite si dynamický model.



Otvorte [Tu](#).

Rovnoľahlosť

Definícia.

Podobné zobrazenie (podobnosť) je zobrazenie, v ktorom obrazom každej úsečky AB je úsečka $A'B'$, ktorej veľkosť je k -násobkom veľkosti úsečky AB ($k > 0$).

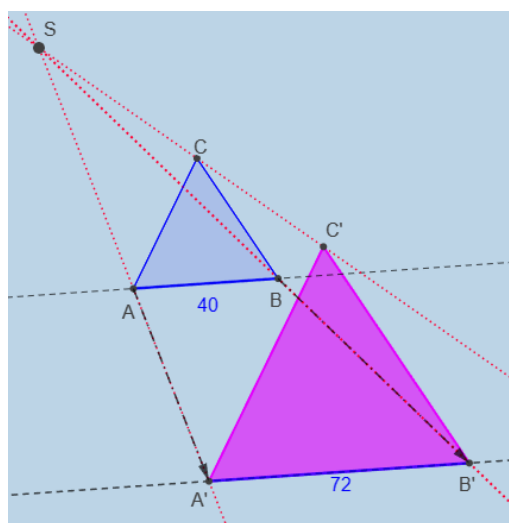
V každom podobnom zobrazení platí:

- obrazom priamky AB je priamka $A'B'$, obrazom rovnobežných priamok sú rovnobežné priamky,
- obrazom polpriamky \overrightarrow{AB} je polpriamka $\overrightarrow{A'B'}$,
- obrazom opačných polpriamok sú opačné polpriamky,
- obrazom uhla $\angle AVB$ je uhol $\angle A'VB'$ zhodný s uhlom $\angle AVB$.

Definícia (Rovnoľahlosť).

Je daný bod S a reálne číslo κ , $\kappa \neq 0$. Rovnoľahlosť (**homotétia**) je zobrazenie $\mathcal{H}(S, \kappa)$, ktoré priradzuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|SX'| = |\kappa| |SX|$, pre $\kappa > 0$ leží X' na polpriamke \overrightarrow{SX} , pre $\kappa < 0$ na opačnej,
2. bodu S bod $S \equiv S'$.



Otvorte si applet [Tu](#).

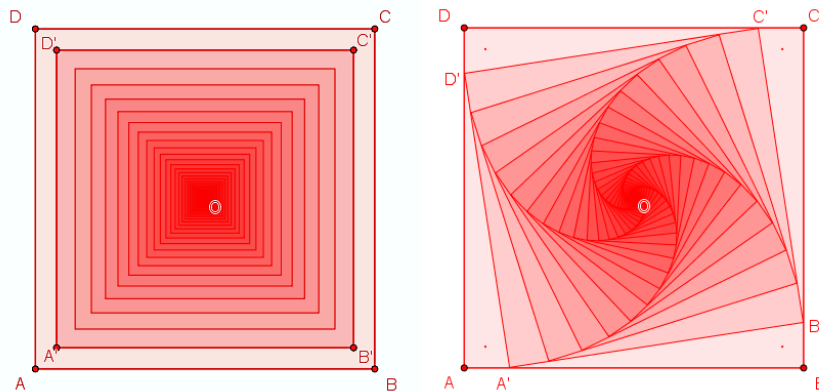
Poznámka.

Rovnoľahlosť $\mathcal{H}(S, \kappa)$ je podobnosť s koeficientom $|\kappa|$. Pre $\kappa = 1$ je identitou, pre $\kappa = -1$ rotáciou okolo S o 180° (aj stredovou súmernosťou so stredom v bode S).

Pre $\kappa \neq 1$ je jediným samodružným bodom stred S . Samodružnou priamkou je každá priamka, ktorá prechádza stredom rovnoľahlosti. Pozrite si súbor appletov od Martina Vinklera [Tu](#).

Rovnoľahlosť je špeciálne podobné zobrazenie. To znamená, že má všetky vlastnosti podobného zobrazenia.

Naviac má vlastnosť, že v rovnoľahlosti **odpovedajúce priamky** (vzor a obraz) **sú rovnobežné**.



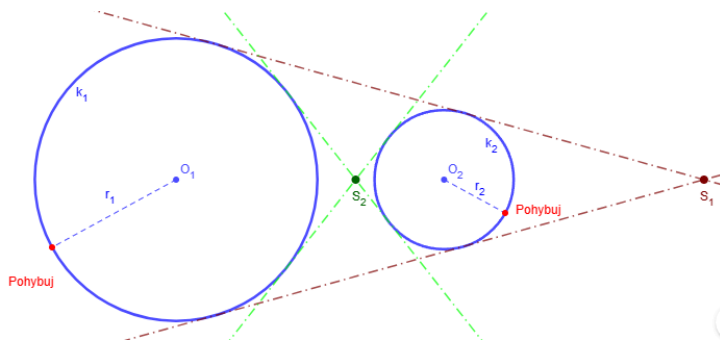
Vľavo. V rovnoľahlosti platí: $AB \parallel A'B'$. Vpravo. Podobné zobrazenie zložené z rovnoľahlosti a otáčania.

Otvorte si applet [Tu](#).

Veta 1.

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S, \kappa): X \rightarrow X'$

1. každé dve rovnoľahlé priamky sú rovnobežné,
2. každé dve rovnobežné a nezhodné úsečky sú rovnoľahlé dvomi spôsobmi,
3. každé dve nezhodné kružnice $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$ sú rovnoľahlé, pričom stredy rovnoľahlosti ležia na strednej kružnici,
4. spoločné dotyčnice dvoch kružníc prechádzajú odpovedajúcimi stredmi rovnoľahlostí (vnútorným S_2 a vonkajším S_1 stredom rovnoľahlosti).



Otvorte si applet [Tu](#).

Veta 2.

Nech sú dve kružnice $k_1 = (O_1, r_1), k_2 = (O_2, r_2)$ rovnoľahlé, ich vonkajší stred rovnoľahlosti je bod S_1 , vnútorný stred rovnoľahlosti S_2 . Potom platí

$$\mathcal{H}_1(S_1, \kappa = \frac{r_2}{r_1}) : k_2 \rightarrow k_1, \quad \mathcal{H}_2(S_2, \kappa = -\frac{r_2}{r_1}) : k_1 \rightarrow k_2.$$

Veta 3.

Zložením rovnoľahlosti a zhodného zobrazenia dostaneme podobné zobrazenie.

Každé podobné zobrazenie možno získať zložením vhodného zhodného zobrazenia a rovnoľahlosti γ .

Cvičenie 1.

Do daného trojuholníka ABC vpište štvorec $KLMN$ tak, aby strana KL ležala na strane AB , bod M ležal na strane BC a bod N na strane AC .

Riešenie v práci [RUM], str. 98.

Cvičenie 2.

Sú dané dva rôzne body A, M , ktorých vzdialenosť je d . Ďalej je dané kladné číslo v . Zostrojte kosoštvorec

Afinita

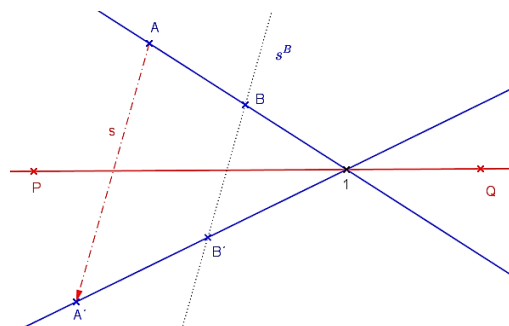
Geometrické zobrazenia f v euklidovskej rovine \mathbb{E}_2 môžeme skúmať aj podľa počtu a druhu samodružných prvkov.

Definícia (Samodružné prvky).

1. Samodružný bod $X \in \mathbb{E}_2$ je bod, ktorý sa pri zobrazení f zobrazí sám na seba. Platí: $X' = f(X)$.
2. Samodružná priamka $p \subset \mathbb{E}_2$ je priamka, ktorá sa pri zobrazení f zobrazí sama na seba $p = f(p)$. Zároveň existuje bod $P \in p$, ktorý sa zobrazí do bodu $P' \neq P; P' \in p$.
3. Priamka samodružných bodov je priamka, kde každý jej bod je samodružný. Pre každý bod na priamke platí $X = X'$. Hovoríme o bodovo samodružnej priamke.

Zvoľme si v euklidovskej rovine \mathbb{E}_2 dve rôznobežné priamky $o = PQ, s = AA'$. Pozrite si obrázok Afinita. Budeme skúmať geometrické zobrazenie OA s vlastnosťami

1. Obrazom ľubovoľného bodu $X \in o = PQ$ je ten istý bod X , priamka $o = PQ$ je bodovo samodružná..
2. Obrazom ľubovoľného bodu $B \in \mathbb{E}_2$ je bod $B' \in \mathbb{E}_2$, ktorý leží na priamke $s^B = BB' \parallel s = AA'$.
3. Obrazom priamky $m = AB$ je priamka $m' = A'B'$, pričom bod $1 = m \cap m'$ je samodružný. V prípade rovnobežnosti $m \parallel o$ je tiež $m' \parallel o$ (bod 1 je nevlastný).
4. Obrazom priamky rovnobežnej s priamkou $s = AA'$ je tá istá priamka, priamka je samodružná.
5. Takéto zobrazenie je zrejme bijektívne zobrazenie euklidovskej roviny. Budeme ho nazývať **osová afinita v rovine**.



Obr. Afinita

Vlastnosti.

- osová afinita je jednoznačne určená priamkou $o = PQ$ a dvojicou odpovedajúcich si bodov A, A' ,
- priamku $o = PQ$ nazývame **os afinity** a priamku $s = AA'$ nazývame **smer afinity**,
- osová afinita zachováva **incidenciu, rovnobežnosť** a **deliaci pomer** troch kolineárnych bodov. Dôkaz je založený na vlastnosti podobných trojuholníkov. Pozrite si prácu [PLICH].

Osovú afinitu môžeme využiť aj pri dôkazoch niektorých vlastností všeobecných trojuholníkov. Stačí ak dokážeme určiť osovú afinitu, v ktorej sa daný všeobecný trojuholník zobrazí na rovnostranný trojuholník. Keďže osová afinita zachováva incidenciu a deliaci pomer (špeciálne stred úsečky sa zobrazí do stredu úsečky), tak napríklad vlastnosť ťažníc stačí dokázať len pre rovnostranný trojuholník.

Uvedieme konštrukciu ako takúto osovú afinitu určíť.

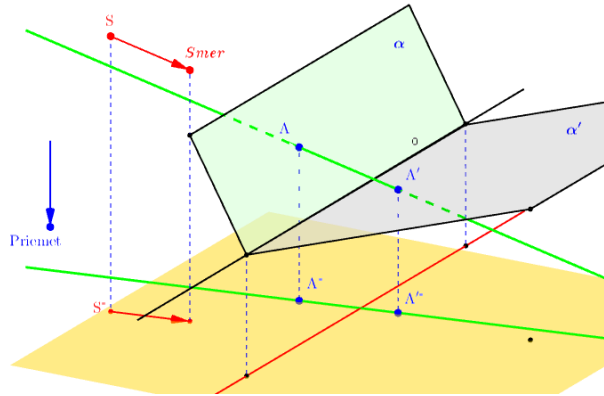
Cvičenie.

Určte OA tak, aby sa všeobecný trojuholník ABC zobrazil do rovnostranného trojuholníka $A'B'C'$. Riešenie

Definícia.

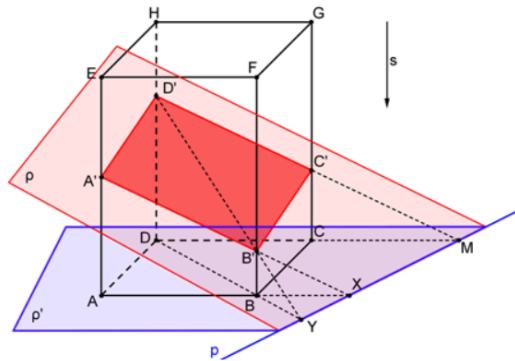
Uvažujme dve rôznobežné roviny α, α' a ich priesečnicu označme o . Zvoľme ďalej smer s , ktorý je rôznobežný s oboma rovinami α, α' . Potom priradíme navzájom body a priamky roviny α bodom a priamkam roviny α' tak, že platí:

- spojnice zodpovedajúcich si bodov sú rovnobežné s priamkou s ,
- priesečníky zodpovedajúcich si priamok ležia na priamke o .



Obr. Priestorová afinita, otvorte si dynamický obrázok [Tu](#).

- Osovú afinitu medzi dvoma rôznobežnými rovinami s výhodou využívame pri rezoch rovnobežnostena.
- Porovnajme vlastnosti osovej afinity s rezom hranola, obrázok "Rez hranola (obrázok je prevzatý s práce [PLI]).



Obr. Rez hranola

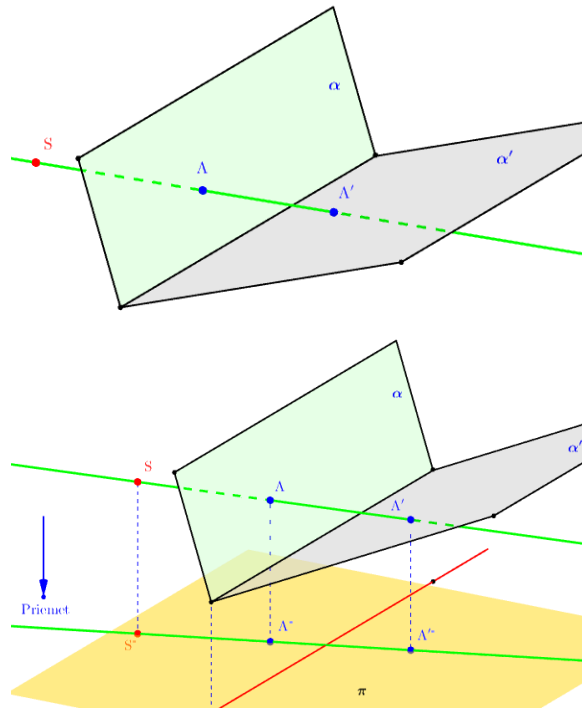
- Rovina ρ zodpovedá rovine rezu, rovina ρ' zodpovedá rovine dolnej podstavy. Smer afinity s zodpovedá smeru hrán, napríklad AE . Zodpovedajúce si body sú napríklad body A, A' . Os o je priesečnica rovin ρ, ρ' a zodpovedá priesečnici roviny podstavy a roviny rezu.

Stredová kolineácia

Definícia (Stredová kolineácia medzi dvoma rovinami).

Nech sú dané dve rôzne roviny α, α' a bod S , ktorý neleží ani v jednej z nich.

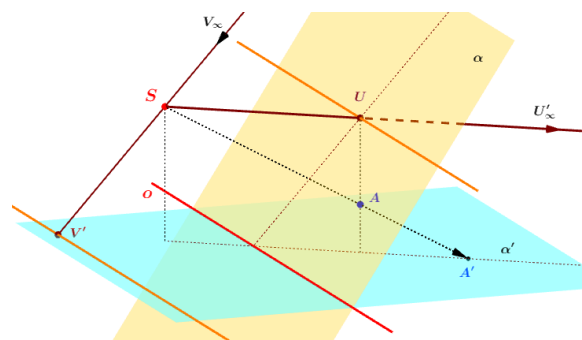
1. **Stredová kolineácia** je bijektívne zobrazenie dvoch rovín, pri ktorom každému bodu prvej roviny odpovedá jeho priemet zo stredy S do roviny druhej. Používa sa aj termín perspektívna kolineácia.
2. Stred premietania S sa nazýva stred kolineácie. Priamku o , priesečnicu rovín α, α' , nazývame osou stredovej kolineácie.



Otvorte si dynamický obrázok [T1](#).

Vlastnosti.

1. Vlastnému bodu môže odpovedať nevlastný bod a naopak. Ak bod $U \in \alpha$ leží v rovine rovnobežnej s rovinou α' , tak priamka \overleftrightarrow{SU} sa s rovinou α' pretína v nevlastnom bode. Analogicky pre bod V_∞ .



Otvorte si dynamický obrázok [T1](#).

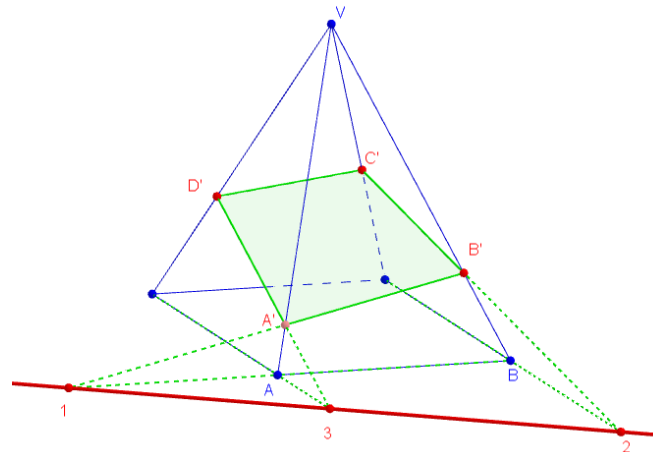
2. Priamky, ktoré si odpovedajú v perspektívnej kolineácii, sa pretínajú na osi kolineácie alebo sú s ňou rovnobežné (majú spoločný nevlastný bod).
3. Body osi kolineácie sú samodružné body. Perspektívna kolineácia **zachováva incidenciu**.
4. Perspektívna kolineácia **nezachováva deliaci pomer** ale zachováva dvojpomer. Stred úsečky sa vo všeobecnosti nezobrazuje do stredú úsečky.

Pre situáciu, keď obrazom vlastného bodu je nevlastný bod a naopak, používame terminológiu:

1. Vlastný bod U , ktorý sa v kolineácii zobrazí do nevlastného U'_∞ nazývame **úbežník** (niekedy úbežník 1. druhu).
2. Vlastný bod V' , ktorý je v kolineácii obrazom nevlastného bodu V_∞ nazývame **úbežník** (niekedy úbežník 2. druhu).
3. Priamky, ktoré sú obrazom alebo vzorom nevlastnej priamky sa nazývajú **úbežnice**. Úbežnice (priamky) obsahujú všetky úbežníky daného druhu a sú rovnobežné s osou afinity.

Špeciálny typ perspektívnej kolineácie ak stred S je nevlastný bod, tak perspektívna kolineácia je osová afinita.

Perspektívnu kolineáciu si môžeme zjednodušene predstaviť ako vzťah medzi **rezom ihlana** (resp. kužeľa) rovinou a podstavou.



Otvorte si krokované riešenie [Tu](#).

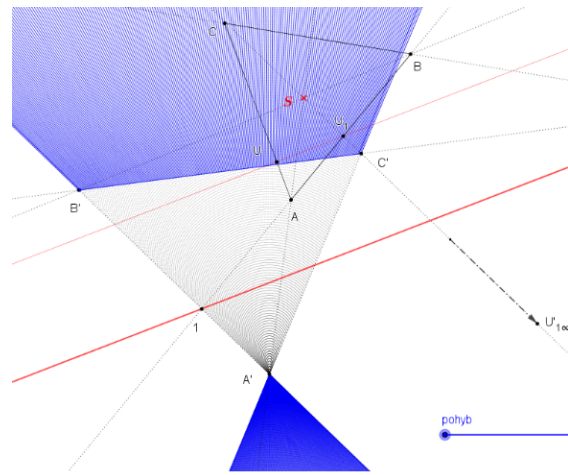
Poznámka.

Stredovú kolineáciu medzi dvoma rovinami α, α' v euklidovskom priestore môžeme previesť na stredovú kolineáciu v rovine.

1. Zvolíme si rovinu π , do ktorej budeme premietiť a smer premietania určený vektorom "Priemet", pričom smer premietania volíme tak, aby nebol rovnobežný so žiadnou z rovin α, α' .
2. Os kolineácie o , stred kolineácie S a zodpovedajúce si body A, A' premietneme pomocou smeru "Priemet" do roviny π .
3. Keďže rovnobežné premietanie (smer "Priemet") zachováva rovnobežnosť, tak pre body A^*, A'^* platí opäť vzťah stredovej kolineácie.
4. Stred kolineácie S^* je rovnobežným priemetom stredy S , podobne body A^*, A'^* sú priemety bodov A, A' .
5. Dvojicu odpovedajúcich si bodov A, A' nazývame **kolineárne združené body**.
6. Vo všeobecnosti kolineácia je jednoznačne určená stredom S , osou o a dvojicou odpovedajúcich si bodov $A \rightarrow A'$.
V takom prípade budeme pre kolineáciu používať označenie $\mathcal{K}(S, o, A \rightarrow A')$.

Cvičenie.

1. V kolineácii $\mathcal{K}(S, o, A \rightarrow A')$ zostrojte (určte) úbežnice. Riešenie [Tu](#).
2. V kolineácii $\mathcal{K}(S, o, u)$ zostrojte obraz trojuholníka ABC . Strany AB, AC pretínajú úbežnicu u .



Riešenie Tu.

Veta.

Obrazom kružnice v stredovej kolineácii je regulárna kužeľosečka (elipsa, parabola alebo hyperbola).

Regulárne kužeľosečky môžeme klasifikovať podľa počtu nevlastných bodov. Elipsa má všetky body vlastné. Parabola má jeden nevlastný bod a hyperbola má dva nevlastné body.

Z predchádzajúceho textu vieme, že obrazom úbežníku I. druhu je nevlastný bod. Z toho vyplýva, že ak kružnica s úbežnicou

1. **nemá** žiadny spoločný bod, potom je obrazom kružnice **elipsa**,
2. **má práve jeden** spoločný bod, potom je obrazom kružnice **parabola**,
3. **má dva** rôzne priesečníky, potom je obrazom kružnice **hyperbola**.

Pozrite si riešené príklady Tu.

Kruhov inverzia

Möbiova rovina je euklidovská rovina doplnená o jeden nevlastný bod M^∞ , ktorý budeme nazývať Möbiov bod.

V takto doplnenej rovine môžeme definovať zobrazenie, ktoré sa nazýva kruhov inverzia.

Definícia.

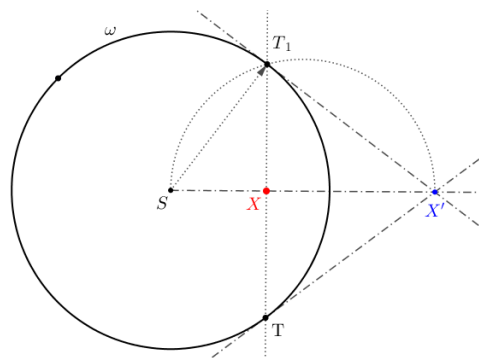
V Möbiovej rovine je dan kružnica $\omega(S, r)$. **Kruhov inverzia** vzhľadom ku kružnici ω je zobrazenie, ktorého obrazom

1. stredu S kružnice ω je bod M^∞
2. bodu M^∞ je stred S kružnice ω
3. ľubovoľného bodu $X \neq S$ a $X \neq M^\infty$ je bod X' ležiaci na polpriamke \overrightarrow{SX} tak, že platí
$$|SX| \cdot |SX'| = r^2.$$

Poznamenajme, že

1. ak bod X' je obrazom bodu X , potom je aj bod X obrazom bodu X' , dvojicu odpovedajúcich bodov nazývame aj navzájom inverzné body - **kruhov inverzia je involútorn zobrazenie**;
2. body na kružnici ω sú samodružné;
3. bod ležiaci vo vnútri kružnice ω sa zobrazí na vonkajší bod a naopak.

Konštrukcia obrazu X' ľubovoľného bodu $X \neq S$ a $X \neq M^\infty$ a $X \notin \omega$ je založen na Euklidovej vete o odvesne.



Otvorte si dynamick konštrukciu [T1](#).

Konštrukcia pre bod X , ležiaci mimo kružnice ω :

Z bodu X zostrojíme dotyčnicu kružnice ω , bod dotyku označme T_i . Z bodu T zostrojíme kolmicu na priamku XS , pta tejto kolmice je hľadan obraz X' . Konštrukciu je možné použiť aj pre bod ležiaci vo vnútri kružnice ω .

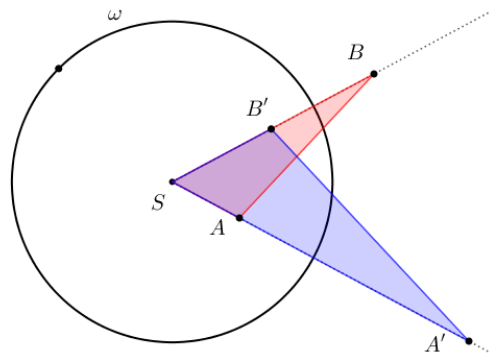
Kruhov inverzia je nelineárne zobrazenie, priamka až na špeciálne prípady sa nezobrazuje na priamku (priamky, ktoré neprechádzajú stredom inverzie, sa zobrazujú na kružnice).

Veta (Konformn zobrazenie).

Kruhov inverzia je konformn zobrazenie, t.j zachováva veľkosť uhla $\angle SAB \simeq \angle S B' A'$. Pozrite si obrázok "Konformn zobrazenie".

Dôkaz

Z definície kruhovej inverzie vyplýva



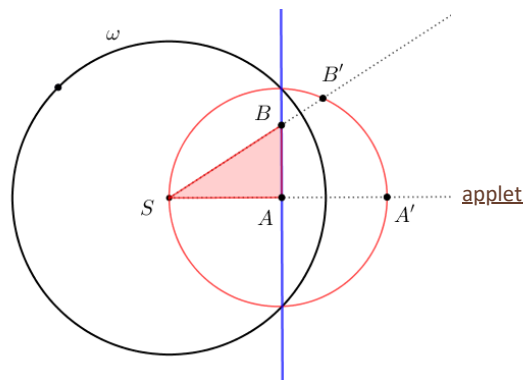
Obr. Konformné zobrazenie

$$|SA| \cdot |SA'| = |SB| \cdot |SB'| = r^2 \Rightarrow \frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{|SB|}{|SA|}$$

Teda trojuholníky ABS , BAS majú spoločný uhol pri vrchole, sú podľa vety *sus* podobné.

Tvrdenie (Obraz priamky a kružnice).

Body priamky prechádzajúcej stredom inverzie S sa zobrazujú opäť na túto priamku.



Obr. Obraz priamky

Dôkaz.

Ide vlastne o špeciálny prípad vety o konformnom zobrazení, keď bod B leží na kolmici k polpriamke \overrightarrow{SA} . Zrejme platí

$$|SP| \cdot |SP'| = |SX| \cdot |SX'| = r^2 \Rightarrow \frac{|SP'|}{|SX'|} = \frac{|SX|}{|SP|},$$

lebo trojuholníky SAB , $S'B'A'$ sú podobné. Uhol pri vrchole X' je pravý, preto bod B' je zrejme bodom Thálesovej kružnice.

Dôsledky .

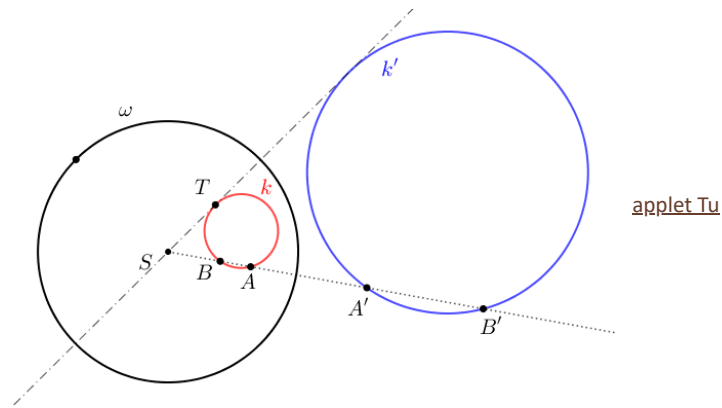
1. Obrazom priamky p , ktorá neprechádza stredom inverzie je kružnica p prechádzajúca stredom S .
2. Obrazom kružnice prechádzajúcej stredom inverzie je priamka, ktorá neprechádza stredom inverzie.
3. Samodružnými bodmi sú body určujúcej kružnice ω .
4. Samodružnými priamkami sú priamky prechádzajúce stredom inverzie.
5. Samodružné kružnice sú tie, ktoré ortogonálne pretínajú určujúcu kružnicu. Dôkaz si môžete pozrieť v práci [JAN].

Dôkazy týchto dôsledkov sa opierajú o involútornosť kruhovej inverzie.

Tvrdenie (Obraz kružnice neprechádzajúcej stredom S).

Obrazom kružnice, ktorá neprechádza stredom inverzie S je kružnica.

Dôkaz.



Obr. Obraz kružnice

Dôkaz: Využite mocnosť bodu S ku kružniciam k a k' .

Poznámka.

Z obrázku "Obraz kružnice" je zrejماً jedna typická ale často opomínaná vlastnosť kruhovej inverzie:

Obrazom stredu kružnice k nie je stred kružnice k' .

Apolloniova úloha.

Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa troch geometrických útvarov: bodu - B , priamky - p , kružnice - k .

1. Existuje celkove desať možných kombinácií. Napr. Bpp znamená zostrojiť kružnicu, ktorá prechádza bodom a dotýka sa dvoch priamok. Dotyk s bodom znamená incidenciu s ním.
2. Najjednoduchšie prípady nastanú, keď sú dané tri body alebo tri priamky; tieto prípady vyriešil Euklides vo svojich Základoch. Apolloniove úlohy patria dodnes k najpríťažlivejším úlohám syntetickej geometrie.

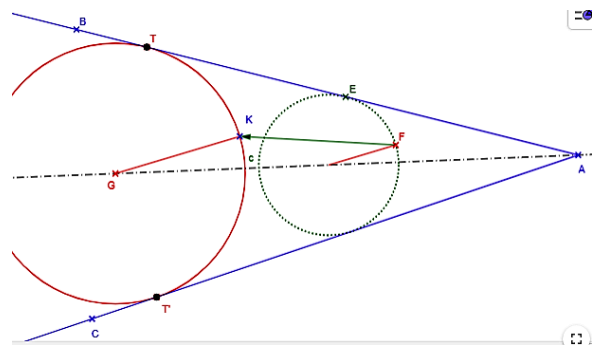
Historické poznámky.

1. O dotyku kružníc údajne písal už Archimedes. Jeho spis sa však nezachoval. Taktiež sa nezachoval dvojzväzkový pôvodný spis Apollonia z Pergy (262?-190? pred n. l.) „O dotykoch“.
2. Zmienil sa o ňom Pappos okolo roku 320, podľa ktorého Apollonios vyriešil všetky úlohy s výnimkou prípadu troch kružníc.
3. Úlohu s tromi kružnicami riešil ako prvý F. Viète (1540-1603) v spise „Apollonius Gallus“ (Paríž, r. 1600). V riešení použil stredy rovnofahlosti troch kružníc.
4. Vo všeobecnom prípade je osem výsledkov. Ak sa dané tri kružnice navzájom dotýkajú, riešenia sú dve (tzv. Soddyho kružnice).

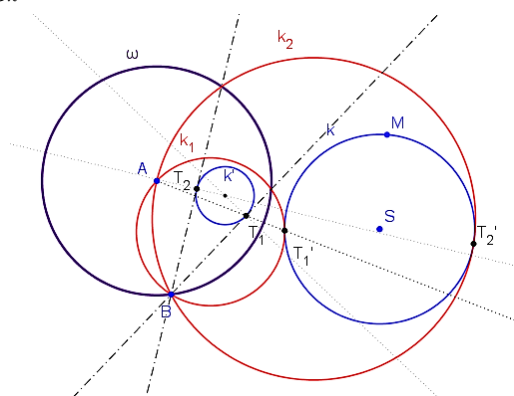
Pozrite si prácu [SKL].

Metódy riešenia Apolloniovej úlohy

1. Množina bodov danej vlastnosti - napr. BBB - Euklidove Základy Kniha 4, Tvrdenie V.
2. Rovnofahlosť - úloha Bpp .



3. Kruhová inverzia - úloha *BBk*



4. Gergonnovo riešenie (Gergonne, Joseph Diaz (19. 6. 1771-4. 5. 1859), francúzsky matematik a astronóm).

Záver

Moderná spoločnosť kladie vysoké požiadavky aj na edukačný proces, čo by sa malo zohľadniť už v procese prípravy budúcich učiteľov matematiky. Týka sa to aj výučby geometrie. Primárne pre študentov vysokých škôl sme pripravili elektronickú knihu "Interaktívna geometria - planimetria", ktorá prináša množstvo appletov spracovaných v softvéri GeoGebra. Ide o študijný materiál vytvorený v LMS Moodle, ktorý spája v sebe prvky interaktivity a dynamiky. Študent má možnosť lepšej vizualizácie situácie, taktiež možnosť krokovať svoje postupy a učiť sa tempom, ktoré mu vyhovuje. Uplatňujeme tak základné didaktické zásady primeranosti a názornosti. Výhodou je kompatibilitnosť oboch softvérov LMS Moodle a GeoGebra s podporou typografického systému TeX. To umožňuje konečnému užívateľovi pracovať v prostredí, v ktorom sa môže dobre a prehľadne orientovať.

V úvodnej časti sme sa venovali Euklidovým základom a následne geometrickým modelom v rámci Hilbertovho axiomatického systému. Ďalej sme uviedli rôzne modely a nástroje GeoGebry v rámci kapitoly Neeuklidovská geometria. Ide o rámec, ktorý obsahom učiva prevyšuje štandardné kurikulum stredoškolskej geometrie. Čitateľovi tak poskytuje možnosť rozšíriť si svoj obzor vedomostí a motivuje žiakov k ďalšiemu štúdiu. Druhá časť práce sa zaoberá geometriou trojuholníka (ťažnice, stredné priečky, výšky, Pytagorova a Euklidove vety a pod.), kružnicou a kruhom (veta o obvodových uhloch) a zobrazeniami (stredová súmernosť a rotácia, posunutie, rovnoľahlosť, afinita, stredová kolíneácia a kruhová inverzia). Po každej kapitole sme pre študentov pripravili zbierku cvičení, ktoré majú poslúžiť ako cenný zdroj spätnej väzby.

Domnievame sa, že implementácia IKT a moderných prvkov do vyučovania geometrie v širokom spektre od prostredia základných škôl až po vysokoškolskú prípravu budúcich učiteľov matematiky sa stala nevyhnutnosťou. Žiaci po nadobudnutí základnej výbavy zručností s rysovaním pomocou pravítka a kružidla sa tak vo vyšších ročníkoch svojho štúdia môžu primárne zamerať na pochopenie geometrických konceptov, experimentovanie, vytváranie si priestoru pre sebazvedľávanie sa a reflexie na už skôr dosiahnuté vlastné výsledky a pokrok. To všetko možno dosiahnuť efektívnou implementáciou interaktívnych prvkov vo vyučovacom procese, nielen v oblasti geometrie.

Literatúra

- [BEC] Bečvár J., Bečvářová M., Vymazalová H.(ed.), Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Prometheus, Praha 2003. Dostupné [Tú.](#)
- [CAS] Castellanos,J., NonEuclid: Interactive Javascript Software for Creating Straightedge and Collapsible Compass Constructions in the Disk Model of Hyperbolic Geometry. Dostupné [Tú.](#)
- [CIZ] Čižmár, J., Euklides Základy. Perfekt 2022. ISBN 9788082260314.
- [DAV]Davidová, E., Řešení planimetrických konstrukčních úloh. Ostrava 2005. Dostupné [Tú.](#)
- [DRA] Drábek K., Harant F., Setzer O.: Deskriptivní geometrie I, SNTL, Praha 1978.
- [EUC] Euklidove Základy., Elektronická - verzia (angl.). Dostupné [Tú.](#)
- [GRE] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries. Third. Development and history. W. H. Freeman and Company, New York, 1993. Dostupné [Tú.](#) Stiahnuté PDF [Tú.](#)
- [HIL] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie). 1899. Dostupné [Tú.](#)
- [HIT] Hitchman, M. P., Geometry with an Introduction to Cosmic Topology. Oregon, USA 2018. Dostupné [Tú.](#)
- [HYP] Hyperbolic Geometry, Part III. Dostupné [Tú.](#) Stiahnuté PDF [Tú.](#)
- [CHAL] Chalmovianská, J., Geometria 2 (pre študentov učiteľstva matematiky). Dostupné [Tú.](#)
- [CHRI] M. Christersson, M., GeoGebra Constructions in the Disc. Dostupné [Tú.](#)
- [JAN]Janyška, J.: Geometrické zobrazení. Skriptá Brno 2022. Dostupné [Tú.](#)
- [JOY] Joyce, D.E., Euclid's Elements, 1994. Dostupné [Tú.](#)
- [KRI] Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O.: 500 riešených úloh z geometrie. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1972. Polytechnická knižnica.
- [LAR] Larson, Loren C., Problem-Solving Through Problems. Springer-Verlag New York Inc. 1983. ISBN: 978-0-387-96171-2. Dostupné [Tú.](#)
- [LUK] Lukáč, S., Bádateľský prístup k výučbe trojuholníkov. Matematika – fyzika – informatika 23 2014.
- [MAN] Manthey, J., GeoGebra Tools for Poincare Disk. Dostupné [Tú.](#)
- [MON] Monoszová, G., Planimetria. Dostupné [Tú.](#)
- [PLI] Plichtová, Petra., Webová aplikace pro výuku osovú afinity a středové kolineace. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, DP, 2023. Dostupné [Tú.](#)
- [RUM] Rumanová,L., Vallo,D: Geometria – vybrané kapitoly. FPV UKF v Nitre, 2009. ISBN: 978-80-8094-567-1.
- [SKL] Sklenáriková, Z.: K metódam riešenia Apolloniovej úlohy. Matematika v proměnách věků. III. Praha, 2004.
- [SED] Šedivý, O., Vallo, D., Základy elementárnej geometrie. FPV UKF v Nitre, 2009. ISBN : 978-80-8094-623-4.Dostupné [Tú.](#)
- [SER] Servít, F., Eukleidovy Základy (Elementa). JČM, Praha, 1907. Dostupné [Tú.](#)
- Ukážka funkčného modelu "The hyperbolic plane" [Tú.](#) ktorý je prevzatý zo stránky [TH](#) .
- [VAL, 2005] Vallo, D.,Geometria perspektívnych trojuholníkov. FPV UKF v Nitre,2005, str.9. ISBN : 80-8050-825-9. Dostupné [Tú.](#)
- [VAL, 2016] Vallo, D., Metodika konštrukčných úloh z geometrie v prostredí DGS. UKF Nitra 2016. Dostupné [Tú.](#)
- [VAL, 2021] Vallo, D., Konceptia výučby geometrie podporovanej implementáciou dynamických geometrických programov. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. FPV Nitra, 2021. Stiahnuté PDF [Tú.](#)
- [VIN] Vinkler, M., Materiály v prostredí GeoGebra. Dostupné [Tú.](#)
- ŽILKOVÁ, K. Dilemy v tvorbe e-kurzu Manipulačná geometria. In: Matematika v primárnej škole - rôzne cesty, rovnaké ciele. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove, 2013. ISBN 978-80-555-0765-1, s. 276-280.

INTERAKTÍVNA GEOMETRIA - PLANIMETRIA

Autor: Mgr. Vladimír Kobza, PhD.

Recenzenti :

Dr.h.c. prof. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.

doc. Mgr. Marek Mokriš, PhD.

Vydavateľ:

Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici

Edícia: Fakulta prírodných vied

Prvé vydanie, 2024.

Rozsah: 114 strán

Schválila Edičná komisia FPV UMB v Banskej Bystrici ako monografiu. Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-557-2155-2

EAN 9788055721552,

<https://doi.org/10.24040/2024.9788055721552>